Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w czwartek 17.10.2024 i poniedziałek 21.10.2024.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

3. Szacowanie liczb i wyrażeń.

Która z liczb jest większa ?

95. $123456\cdot 123458$ czy 123457^2

96. $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$

97. $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{666}$

98. $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{666}$

99. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{666}$

100. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{667}$

101. 2^{1000} czy 3^{700}

102. 5^{444} czy 3^{700}

103. $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$

104. $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$

105. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$

106. $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$

107. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$

108. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$

109. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$

110. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$

111. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$

112. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12

113. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$

114. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

115. $\log_9 27$ czy $\log_4 8$

116. $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

117. $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

118. $(\log_2 3)\cdot\log_5 7$ czy $(\log_2 7)\cdot\log_5 3$

119. $(\log_2 3)\cdot\log_7 5$ czy $(\log_7 9)\cdot\log_{16} 25$

120. $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

121. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$

122. $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

123. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

124. $2^{\log_3 5}$ czy $5^{\log_3 2}$

125. $\frac{\log_3 15\cdot\log_5 15}{\log_3 15+\log_5 15}$ czy $\frac{\log_2 14\cdot\log_7 14}{\log_2 14+\log_7 14}$

Wskazówka do niektórych pytań:
Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różna od zera.
Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną .....

126. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$?

127. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$?

128. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$?

129. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$?

130. Która liczba jest większa: $2^{2^{2^{11}}}$ czy $1000^{2^{2^{10}}}$?

131. Która liczba jest większa: $a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}}$ czy 10^{10} ?
Liczba $a=\sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

132. Która liczba jest większa: $\log_a b$ czy $\log_b a$?
Przyjmujemy $a=\log_2 3$ oraz $b=\log_3 2$.

133. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej.

$$A=10^{10^{11}}, \quad B=10^{10^{20}}, \quad C=10^{10^{50}}, \quad D=10^{10^{250}}, \quad E=(10!)^{10!}$$
$$F=(100!)^{10^{10}}, \quad G=2^{100!}, \quad H=2^{2^{100}}, \quad I=10^{10^{10^{3}}}, \quad J=2^{2^{2^{10}}}$$

134. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówności
$$n^{2^{120}}<2^n<n^{2^{122}}\,.$$

135. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności
$$n^{2^{2017}}<2^n<n^{2^{2018}}\,.$$

136*. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności
$$4^n<n^{2^{2017}}<8^n\,.$$

137. Udowodnić nierówność
$$n^{n^{2^{1000}}}<2^{2^n}$$
dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

138. Niech $A_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n<2$.

139. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{3}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 3$.

140. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-\frac{C}{n}\right|<\frac{D}{n^3}\,.$$

141. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 6C$ (wersja łatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 4C$ (wersja trudniejsza).

142. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 8C$ (wersja najłatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 4C$ (wersja średnio trudna).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 2C$ (wersja najtrudniejsza).

143. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D, a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k\leqslant\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+2}+\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+4}+\ldots+\sqrt{16n^2-1}+\sqrt{16n^2}\leqslant Dn^k\,.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C:

- Przy $D/C \geqslant 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

144. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t}\leqslant 18C\,.$$

Poniższe zadania omówić tylko wtedy, gdy zostanie czasu.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

145. $\ldots\ldots\ldots < 2^{500} < \ldots\ldots\ldots$

146. $\ldots\ldots\ldots < 3^{2000} < \ldots\ldots\ldots$

147. $\ldots\ldots\ldots < 2^{10000} < \ldots\ldots\ldots$

148. $\ldots\ldots\ldots < 30^{10000} < \ldots\ldots\ldots$

149. $\ldots\ldots\ldots < 2^{2^{10}} < \ldots\ldots\ldots$

150. $\ldots\ldots\ldots < 4444^{4444} < \ldots\ldots\ldots$

151. $\ldots\ldots\ldots < 7777^{7777} < \ldots\ldots\ldots$

152. $\ldots\ldots\ldots < 2011^{2011} < \ldots\ldots\ldots$

153. $\ldots\ldots\ldots < 222^{5555} < \ldots\ldots\ldots$

154. $\ldots\ldots\ldots < 5555^{222} < \ldots\ldots\ldots$

155. $\ldots\ldots\ldots < 333^{333} < \ldots\ldots\ldots$

156. $\ldots\ldots\ldots < 10000! < \ldots\ldots\ldots$

157. $\ldots\ldots\ldots < 666! < \ldots\ldots\ldots$

158. $\ldots\ldots\ldots < 5000! < \ldots\ldots\ldots$

159. $\ldots\ldots\ldots < 35000! < \ldots\ldots\ldots$

160. $\ldots\ldots\ldots < \left(10^5\right)! < \ldots\ldots\ldots$

161. $\ldots\ldots\ldots < \left(7+2\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots$

162. $\ldots\ldots\ldots < \left(6+3\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots$

163. $\ldots\ldots\ldots < \left(91+\sqrt{91}\right)^{100} < \ldots\ldots\ldots$

164. $\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{3} < \ldots\ldots\ldots$

165. $\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{4} < \ldots\ldots\ldots$

166. $\ldots\ldots\ldots < \binom{10000}{5} < \ldots\ldots\ldots$

167. $\ldots\ldots\ldots < \binom{10^5}{100} < \ldots\ldots\ldots$

168. $\ldots\ldots\ldots < \binom{10^{10}}{20} < \ldots\ldots\ldots$

169. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{9n^2+40n} - \sqrt{9n^2+16n} \leqslant 2C\,.$$

170. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[3]{n^3+63n^2} - n \leqslant 7C\,.$$

171. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[8]{n^8+255n^7} - n \leqslant 32C\,.$$

172. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leqslant \sqrt[4]{n^4+15n^2} - n \leqslant \frac{4C}{n}\,.$$

173. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n} \leqslant 11C\,.$$

174. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n} \leqslant 2C\,.$$

175. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.
Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D<3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2} \leqslant D\,.$$

176. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}} \leqslant 2C\,.$$

177. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leqslant 4C\cdot n^k\,.$$