85. Dowieść, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{45}75$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{45}75 = \frac{m}{n},$$

$$45^{m/n} = 75,$$

$$45^m = 75^n.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m} \cdot 5^m = 3^n \cdot 5^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2m & = & n \\ m & = & 2n \end{array} \right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = 2n > n,$$

czyli $n > n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{45}75$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

86. Niech

$$a = 2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 6^{10} \qquad \text{oraz} \qquad b = 2^{34} \cdot 3^{12} \cdot 6^{10}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a = 2^{42} \cdot 3^{21} = 12^{21}$ oraz $b = 2^{44} \cdot 3^{22} = 12^{22}$, otrzymujemy

$$\log_a b = \frac{22}{21},$$

co jest liczbą wymierną.

87. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)=\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m/n}=\frac{9}{8}\,,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m}=\left(\frac{9}{8}\right)^{n}\,,$$

$$8^n\cdot 3^m=2^m\cdot 9^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n}\cdot 3^m=2^m\cdot 3^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3n & = & m \\ m & = & 2n \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m=3n>2n=m\,,$$

czyli $m>m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

88. Dowieść, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{4}{15}\right)^{-m/n}=\frac{15}{8}\,,$$

$$\left(\frac{4}{15}\right)^{-m}=\left(\frac{15}{8}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^{m}=\left(\frac{15}{8}\right)^{n}\,,$$

$$15^m\cdot 8^n=15^n\cdot 4^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n}\cdot 3^m\cdot 5^m=2^{2m}\cdot 3^n\cdot 5^n\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3n & = & 2m \\ m & = & n \\ m & = & n \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m,n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=3n>2n=2m\,,$$

czyli $2m>2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami piętnastki,
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są nieujemne.

89. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$w=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\,,$$
$$w-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}\,,$$
$$\left(w-\sqrt{2}\right)^3=3\,,$$
$$w^3-3w^2\cdot\sqrt{2}+6w-2\sqrt{2}=3\,,$$
$$w^3+6w-3=\left(3w^2+2\right)\cdot\sqrt{2}\,,$$
$$\frac{w^3+6w-3}{3w^2+2}=\sqrt{2}\,,$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna (zauważmay, że mianownik $3w^2+2$ jest różny od zera jako liczba dodatnia), a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

90. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab+bc+ca$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika ze wzoru

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\,.$$

91. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x\neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.

Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x+10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć x.

Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Zakładając, że

$$\log_x(x+10)=w\,,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w=x+10\,. \qquad (\#)$$

Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2=x+10\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[1] otrzymując

$$x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+10)=\log_x x^2=2$$

jest liczbą wymierną.

Sposób II:

Postępujemy jak w sposobie I przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1}=x+10$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x=\sqrt{26}-5\,.$$

Wówczas

$$\log_x(x+10)=\log_x x^{-1}=-1$$

jest liczbą wymierną.

92. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x\neq 1$, dla których liczba

$$\log_x(x+120)$$

jest wymierna.

Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.

Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

Rozwiązanie:

Przykład I:

Dla $x=5$ liczba $\log_x(x+120)=\log_5 125=3$ jest liczbą wymierną.

Przykład II:

Dla $x=8$ liczba $\log_x(x+120)=\log_8 128=\dfrac{7}{3}$ jest liczbą wymierną.

Przykład III:

Zakładając, że

$$\log_x(x+120)=w\,,$$

[1] Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

otrzymujemy równanie

$$x^w = x + 120\,. \tag{\#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2 = x + 120\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[2] otrzymując

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{481}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1 + \sqrt{481}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

Przykład IV:

Postępujemy jak w przykładzie III przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1} = x + 120$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x = \sqrt{3601} - 60\,.$$

Wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^{-1} = -1$$

jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = -1\,.$$

podstawiamy $n=3600$, skąd otrzymujemy $x=\sqrt{3601}-60$.

93. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n \geqslant 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^{n} \log_2 \log_k (k+1)$$

jest wymierna.

Rozwiązanie:

[2] Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

Przyjmijmy $n=2^{2^m}-1$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas korzystając z równości $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$ otrzymujemy

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\log_k(k+1)=\log_2\prod_{k=2}^{n}\log_k(k+1)=\log_2\log_2(n+1)=\log_2\log_2 2^{2^m}=m\,.$$

94. Dowieść, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{60}150$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{60}150=\frac{m}{n}\,,$$
$$60^{m/n}=150\,,$$
$$60^m=150^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Sposób I

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 3^m\cdot 5^m=2^n\cdot 3^n\cdot 5^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2m & = & n\\ m & = & n\\ m & = & 2n \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n=2m>m=n\,,$$

czyli $n>n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Sposób II

Ostatnią niezerową cyfrą liczby 60^m jest 6, a ostatnią niezerową cyfrą liczby 150^n jest 5, zatem liczby te nie mogą być równe.

W obu sposobach doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{60}150$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.