

**Kolokwium nr 1:** środa 16.10.2024, godz. 8:30-10:00, materiał zad. 1–94.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach  
w poniedziałek 14.10.2024.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!**

**2. Liczby wymierne i niewymierne.**

**59.** Czy istnieją takie liczby naturalne  $m, n > 1$ , że  $\log_m n = 13/7$  ?

**60.** Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy,  $n$ , liczby całkowite oraz znaki  $+, -, \cdot, :$  i  $\sqrt{\quad}$  zapisz liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od  $\frac{1}{n}$ .

**OSZUSTWO 61.**

**ZADANIE:** Dowieść, że liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie I:*

Liczba  $-\sqrt{2}$  jest niewymierna. Także liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}$  jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat  $3-\sqrt{8}$  też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$  jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

*Rozwiązanie II:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$  jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ . Wtedy

$$w = \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1) + (w-1)(w+1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez  $w+1$  otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby  $w$ , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

**62.** Liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba  $a+b$  jest niewymierna?

**63.** Liczby  $a+b$ ,  $b+c$  i  $c+a$  są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są wymierne?

**64.** Liczby  $a+b$ ,  $b+c$ ,  $c+d$  i  $d+a$  są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  są wymierne?

**20 przykładów.**

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być uznane.

Podaj przykład takiej liczby rzeczywistej  $x$ , że

65.  $0 < x < 1$  oraz  $x$  jest niewymierna,
66.  $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$  oraz  $x$  jest wymierna,
67.  $x^2$  i  $x^3$  są niewymierne, ale  $x^5$  jest wymierna,
68.  $x^4$  i  $x^6$  są wymierne, ale  $x^5$  jest niewymierna,
69.  $(x+1)^2$  jest niewymierna,
70.  $x$  jest niewymierna, ale  $x + \frac{1}{x}$  jest wymierna,
71.  $x$  jest niewymierna i  $2^x$  jest niewymierna,
72.  $2^x + 3^x$  jest liczbą niewymierną,
73.  $2^x + 3^x$  jest liczbą wymierną,
74.  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,
75.  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą wymierną,
76.  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,
77.  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą wymierną,
78.  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą całkowitą dodatnią,
79.  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą niewymierną,
80.  $x + \log_2 x$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,
81.  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,
82.  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą niewymierną,
83.  $\log_x(1+x)$  jest liczbą wymierną,
84.  $\log_x(1+x)$  jest liczbą niewymierną.

**Zadania do samodzielnego przeanalizowania.** Mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

---

85. Dowieść, że liczba  $\log_{45} 75$  jest niewymierna.

86. Niech

$$a = 2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 6^{10} \quad \text{oraz} \quad b = 2^{34} \cdot 3^{12} \cdot 6^{10}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba  $\log_a b$  jest wymierna czy niewymierna.

87. Dowieść, że liczba  $\log_{(3/2)} \left( \frac{9}{8} \right)$  jest niewymierna.

88. Dowieść, że liczba  $\log_{(4/15)} \left( \frac{15}{8} \right)$  jest niewymierna.

89. Dowieść, że liczba  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  jest niewymierna.

90. Dane są takie liczby rzeczywiste  $a, b, c$ , że liczby  $a+b+c$  oraz  $a^2+b^2+c^2$  są wymierne. Dowieść, że liczba  $ab+bc+ca$  jest wymierna.

91. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej  $x \neq 1$ , że liczba  $\log_x(x+10)$  jest wymierna.

**Wskazówka:** Załóż, że  $\log_x(x+10)$  jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć  $x$ .

Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości  $\log_x(x+10)$ .

92. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich  $x \neq 1$ , dla których liczba

$$\log_x(x+120)$$

jest wymierna.

**Wsk.:** Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.

Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości  $\log_x(x+120)$ .

93. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych  $n \geq 2$ , że liczba

$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k(k+1)$$

jest wymierna.

94. Dowieść, że liczba  $\log_{60} 150$  jest niewymierna.