Kolokwium nr 6: środa 15.01.2025, godz. 8:30 –10:00, materiał zad. 1–628.

12. Pochodna funkcji – zastosowania.

Zadania do omówienia[1] na ćwiczeniach w czwartek 19.12.2024, poniedziałek[2] 9.01.2025 i poniedziałek 13.01.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

565. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 < \frac{1}{1201}\,.$$

566. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}\,.$$

567. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{34} < \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 < \frac{1}{13}\,.$$

568. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 12 < \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 10\,.$$

569. Udowodnić nierówność

$$26 \cdot e^{\operatorname{arctg} 5} < 25 \cdot e^{\operatorname{arctg} 7}\,.$$

570. Dana jest funkcja $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[\pi]{x^\pi + \pi}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|\,.$$

571. Dana jest funkcja $f:[-10, 10] \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|\,.$$

[1] Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

[2] Miejcie, proszę, to na względzie:
Poniedziałek w czwartek będzie.

572. Dana jest funkcja $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{5x^2+125}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[-10,10]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2\cdot|x-y|\ .$$

573. Dana jest funkcja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{2x^2+2}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[-1,1]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\ .$$

574. Dana jest funkcja $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{x^2+9}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[-4,4]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\ .$$

575. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x)=\frac{1}{x^4}\ .$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{256}\ .$$

576. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\ .$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

577. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)\ .$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\ .$$

578. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x^2-3\cdot|x+1|$$
na przedziale $[-2,2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

579. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$
na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

580. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-x-6\right|$$
na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

581. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x^2-\sqrt{4x^2+4x+1}$$
na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

582. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2$$
na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

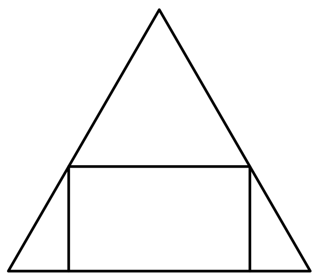
583. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$
na przedziale $\left[-4, \sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

584. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}$$
na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

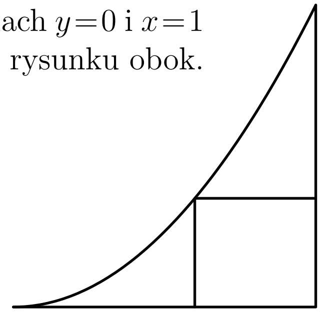
585. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem
$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln\left(x^2+1\right)}{99}+\operatorname{arctg} x$$
osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

586. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem
$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$
osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

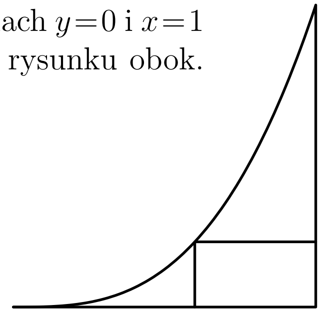
587. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



588. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



589. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



590. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C},$$

gdzie $C=6$ **(wersja trudniejsza)** lub $C=3$ **(wersja łatwiejsza).**

591. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$.

592. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=5\sin x-\sin 5x.$$

593. Niech $f(x)=4\cos x+\sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0,2\pi)$.

594. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13 \qquad \text{czy} \qquad 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10\ ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x)=16\operatorname{arctg}x-\ln\left(x^2+1\right)$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0,\infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

595. $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$ ....

596. $f(x)=4\sqrt{x}-x^2$ ....

597. $f(x)=32\sqrt{x}-x^2$ ....

598. $f(x)=4\sqrt{x}-27x^2$ ....

599. $f(x)=32\sqrt{x}-27x^2$ ....

600. $f(x)=4\sqrt{x}-125x^2$ ....

601. $f(x)=6\sqrt{x}-x^3$ ....

602. $f(x)=3\sqrt{x}-16x^3$ ....

603. $f(x)=8\sqrt{x}-x^4$ ....

604. $f(x)=\sqrt{x}-16x^4$ ....

605. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

606. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^5+x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

607. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

608. $f_1(x)=x^3+x$ $g_1'(0)=\ldots\ldots$ $g_1'(2)=\ldots\ldots$ $g_1'(130)=\ldots\ldots$

609. $f_2(x)=x^7+x$ $g_2'(0)=\ldots\ldots$ $g_2'(2)=\ldots\ldots$ $g_2'(130)=\ldots\ldots$

610. $f_3(x)=x^3+5x$ $g_3'(0)=\ldots\ldots$ $g_3'(6)=\ldots\ldots$ $g_3'(42)=\ldots\ldots$

611. $f_4(x)=x^5+5x$ $g_4'(0)=\ldots\ldots$ $g_4'(6)=\ldots\ldots$ $g_4'(42)=\ldots\ldots$

612. $f_5(x)=x^3+2x$ $g_5'(3)=\ldots\ldots$ $g_5'(12)=\ldots\ldots$ $g_5'(72)=\ldots\ldots$

613. $f_6(x)=x^3+4x$ $g_6'(5)=\ldots\ldots$ $g_6'(16)=\ldots\ldots$ $g_6'(80)=\ldots\ldots$

614. $f_7(x)=2x^3+x$ $g_7'(3)=\ldots\ldots$ $g_7'(18)=\ldots\ldots$ $g_7'(57)=\ldots\ldots$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcja $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f_i\left(g_i(x)\right)=x^3+3x\,.$$
W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

615. $g_1(x)=x^3+x+6$ $\quad f_1'(8)=\,.....\quad f_1'(16)=\,.....\quad f_1'(36)=\,.....$

616. $g_2(x)=x^3+2x+3$ $\quad f_2'(6)=\,.....\quad f_2'(15)=\,.....\quad f_2'(36)=\,.....$

617. $g_3(x)=2x^3+x$ $\quad f_3'(3)=\,......\quad f_3'(18)=\,......\quad f_3'(57)=\,......$

618. $g_4(x)=x^5+x+2$ $\quad f_4'(2)=\,.....\quad f_4'(4)=\,.....\quad f_4'(36)=\,.....$

619. $g_5(x)=x^5+2x$ $\quad f_5'(0)=\,......\quad f_5'(3)=\,......\quad f_5'(36)=\,......$

620. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji
$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}\;+\;\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\;-\;1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}\;-\;\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\;-\;1\right)$$
na przedziale $[10,\,50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f=g\circ h$, gdzie
$$g(t)=\operatorname{arctg}\left(t-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$
oraz
$$h(x)=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,.$$

621. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^3} & \text{dla}\quad x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$
jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

622. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x} & \text{dla}\quad x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$
jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

623. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

624. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

625. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

626. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

627. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}$$

na przedziale $[-1/k,\, b]$ była odwrotna do samej siebie.

628. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+1-\sqrt{kx+1}$$

na przedziale $[-1/k,\, b]$ była odwrotna do samej siebie.