

487. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^2 - x^2}{(\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x) \cdot (y + x)}{(\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y - x)} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y + x}{\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{x + x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

488. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0, +\infty)$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę czwartych potęg otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{x}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y - x}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{1}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(2 \cdot \sqrt[4]{x}) \cdot (2 \cdot \sqrt{x})} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}. \end{aligned}$$

489. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^8 + 1}$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz pięciokrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[4]{y^8 + 1} - \sqrt[4]{x^8 + 1}}{y - x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^8 - x^8}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x) \cdot (y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1}) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y + x) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^4)}{(\sqrt{y^8 + 1} + \sqrt{x^8 + 1}) \cdot (\sqrt[4]{y^8 + 1} + \sqrt[4]{x^8 + 1})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+x) \cdot (x^2+x^2) \cdot (x^4+x^4)}{(\sqrt{x^8+1} + \sqrt{x^8+1}) \cdot (\sqrt[4]{x^8+1} + \sqrt[4]{x^8+1})} = \\
&= \frac{2x \cdot 2x^2 \cdot 2x^4}{2\sqrt{x^8+1} \cdot 2\sqrt[4]{x^8+1}} = \frac{2x^7}{(x^8+1)^{3/4}}.
\end{aligned}$$

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

490. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $f'(1) = 1/3$ $f'(8) = 1/12$ $f'(27) = 1/27$

491. $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ $f'(1) = -1/2$ $f'(2) = -8/125$ $f'(3) = -3/250$

492. $f(x) = \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} 2$ $f'(1) = 1$ $f'(2) = 4/5$ $f'(3) = 3/5$

493. $f(x) = \ln(x^3+1)$ $f'(1) = 3/2$ $f'(2) = 4/3$ $f'(3) = 27/28$

494. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$ $f'(1) = 1$ $f'(2) = 4/17$ $f'(3) = 3/41$

495. $f(x) = \sqrt{24x+1}$ $f'(0) = 12$ $f'(1) = 12/5$ $f'(2) = 12/7$

496. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x+8}$ $f'(-1) = 1/6$ $f'(0) = -1/12$ $f'(1) = 1/6$

497. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$ $f'(-1) = 1/27$ $f'(0) = 0$ $f'(1) = -1/27$

498. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$ $f'(-1) = -1/80$ $f'(0) = 1/320$ $f'(1) = -1/80$

499. $f(x) = \sqrt{8x+1} \cdot \sqrt[3]{7x^2+1}$ $f'(0) = 4$ $f'(1) = 37/6$ $f'(3) = 303/40$

500. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y = x^2$ oraz paraboli o równaniu $y = x^2 - 8x$.

Rozwiązanie:

Niech (a, a^2) i $(b, b^2 - 8b)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 - 8x$. Ponieważ $f'(x) = 2x$ oraz $g'(x) = 2x - 8$, równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 \quad \text{oraz} \quad y = (2b - 8) \cdot x - b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 2b - 8 \quad \text{oraz} \quad -a^2 = -b^2.$$

Z drugiego równania otrzymujemy $a = \pm b$, a ponieważ pierwsze równanie daje $b - a = 4 \neq 0$, musi być $a = -b$. Stąd $b = 2$ oraz $a = -2$.

W konsekwencji szukana prosta ma równanie

$$y = -4x - 4.$$

501. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = -x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, -b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = -x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = -2x,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = -2b \cdot x + b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = -2b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = b^2.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $b = -a$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $a = \pm 1$ oraz $b = \mp 1$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 2x + 1 \quad \text{oraz} \quad y = -2x + 1.$$

502. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = 2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, 2b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 2x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = 4x,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = 4b \cdot x - 2b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 4b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = -2b^2.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a = 2b$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $b = \pm 1$ oraz $a = \pm 2$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 4x - 2 \quad \text{oraz} \quad y = -4x - 2.$$

503. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x)) \dots))).$$

Obliczyć $g'(100)$.

Rozwiązanie:

Niech f_n będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji f . Udowodnimy przez indukcję, że

$$f_n(x) = (\sqrt{x} + n)^2.$$

1° Zauważmy, że

$$f_1(x) = f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2,$$

zatem dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

2° Zakładając

$$f_n(x) = (\sqrt{x} + n)^2,$$

otrzymujemy

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = f\left((\sqrt{x} + n)^2\right) = \left(\sqrt{(\sqrt{x} + n)^2} + 1\right)^2 = (\sqrt{x} + n + 1)^2,$$

co kończy zasadniczą część dowodu indukcyjnego.

Ponieważ $g = f_{100}$,

$$g'(x) = \frac{d}{dx} (\sqrt{x} + 100)^2 = 2 \cdot (\sqrt{x} + 100) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 100}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{x}},$$

skąd $g'(100) = 11$.

504. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + x^2} = 1.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze.

505. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnych jednostronnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{1 + x^2} = 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{1 + x^2} = -1. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze.

506. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2 + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2 + 1} - 1} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{(\sqrt{h^2 + 1} + 1) \cdot (\sqrt[4]{h^2 + 1} + 1)}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{h^2 + 1} + 1) \cdot (\sqrt[4]{h^2 + 1} + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2 + 1} - 1} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{(\sqrt{h^2 + 1} + 1) \cdot (\sqrt[4]{h^2 + 1} + 1)}}}{-|h|} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{h^2+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^2+1}+1)}} = - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = - \frac{1}{2}.$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja ta nie jest różniczkowalna w zerze.

507. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1+a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{-|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(- \frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} - a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1) \cdot (\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(0^+) = f'(0^-)$, czyli

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}},$$

co zachodzi dla $a = -1$.

Odpowiedź: Podana funkcja jest różniczkowalna w zerze dla $a = -1$.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

$$508. \quad f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}-1} \qquad f_1'(0^-) = -1/\sqrt{2} \qquad f_1'(0^+) = 1/\sqrt{2}$$

$$509. \quad f_2(x) = \sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1} \qquad f_2'(0^-) = -1 \qquad f_2'(0^+) = 1$$

$$510. \quad f_3(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+4}-2} \qquad f_3'(0^-) = -1/2 \qquad f_3'(0^+) = 1/2$$

$$511. \quad f_4(x) = \sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9} \qquad f_4'(0^-) = -2/3 \qquad f_4'(0^+) = 2/3$$

$$512. \quad f_5(x) = \sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1} \qquad f_5'(0^-) = -1/\sqrt{2} \qquad f_5'(0^+) = 1/\sqrt{2}$$

$$513. \quad f_6(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2} \qquad f_6'(0^-) = -1/(4\sqrt{2}) \qquad f_6'(0^+) = 1/(4\sqrt{2})$$

$$514. \quad f_7(x) = \sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3} \quad f_7'(0^-) = -(\sqrt{2})/(3\sqrt{3}) \quad f_7'(0^+) = (\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$$

515. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2024 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{e^x+1}{e^x-1}, \\ e^x \cdot e^y - e^y &= e^x + 1, \\ e^x \cdot e^y - e^x - e^y &= 1. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x=y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x))=x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x . W konsekwencji $g(x)=x$ dla $x>0$ i $g'(x)=1$. W szczególności $g'(\sqrt{e})=1$ jest liczbą wymierną.

516. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x)) \dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} y^3 &= \frac{x^3}{x^3 - 1}, \\ x^3 y^3 - y^3 &= x^3, \\ x^3 y^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x \neq 1$, wobec czego $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.

517. Funkcja $f: Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x)) \dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}},$$

skąd

$$f(f(x)) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(x))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{x^3 - 1}{x^3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{x^3}{x^3 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{x^3 - 1}}$$

oraz

$$f(f(f(x))) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(f(x)))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{-1}{x^3 - 1}}} = \sqrt[3]{1 + x^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Z otrzymanej równości $f(f(f(x))) = x$ wynika $g(x) = x$ dla $x \in Z$, co daje $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.