Kolokwium nr 5: środa 18.12.2024, godz. 8:30 –10:00, materiał zad. 1–564.

11. Pochodna funkcji.

Zadania do omówienia[1] na ćwiczeniach w czwartek 12.12.2024 i w poniedziałek 16.12.2024.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

487. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

488. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

489. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^8+1}$.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

490. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad f'(1)=\ \ldots\ldots$ $\quad f'(8)=\ \ldots\ldots$ $\quad f'(27)=\ \ldots\ldots$

491. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

492. $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}2$ $\quad f'(1)=\ \ldots.$ $\quad f'(2)=\ \ldots.$ $\quad f'(3)=\ \ldots.$

493. $f(x)=\ln\left(x^3+1\right)$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

494. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

495. $f(x)=\sqrt{24x+1}$ $\quad f'(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$

496. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$ $\quad f'(-1)=\ldots..$ $\quad f'(0)=\ldots..$ $\quad f'(1)=\ldots..$

497. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$ $\quad f'(-1)=\ldots..$ $\quad f'(0)=\ldots..$ $\quad f'(1)=\ldots..$

498. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$ $\quad f'(-1)=\ldots..$ $\quad f'(0)=\ldots..$ $\quad f'(1)=\ldots..$

499. $f(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$ $\quad f'(0)=\ \ldots.$ $\quad f'(1)=\ \ldots.$ $\quad f'(3)=\ \ldots.$

500. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y=x^2$ oraz paraboli o równaniu $y=x^2-8x$.

[1]Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

501. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=-x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

502. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

503. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=1+x+2\sqrt{x}\,.$$

Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Obliczyć $g'(100)$.

504. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

505. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

506. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

507. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

508. $f_1(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ $\quad f_1'(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_1'(0^+)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

509. $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$ $\quad f_2'(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_2'(0^+)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

510. $f_3(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$ $\quad f_3'(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_3'(0^+)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

511. $f_4(x)=\sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$ $\quad f_4'(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_4'(0^+)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

512. $f_5(x)=\sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$ $\quad f_5'(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_5'(0^+)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

513. $f_6(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ $\quad f_6'(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_6'(0^+)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

514. $f_7(x)=\sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$ $\quad f_7'(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad f_7'(0^+)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

515. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$
Funkcja g jest złożeniem 2024 egzemplarzy funkcji f:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots))).$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{e}\right)$ jest wymierna.

516. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, jest określona wzorem
$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$
Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots))).$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

517. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, jest określona wzorem
$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}.$$
Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots))).$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

518. $3x^{33}-5x+1$ **519.** $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$ **520.** $\frac{1-x^3}{1+x^3}$ **521.** $\left(x^5+1\right)^{20}$

522. $\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+x^{1/3}\right)\left(1+x^{1/4}\right)$ **523.** $\frac{x+1}{x-1}$ **524.** $\frac{x}{x^2+1}$ **525.** $(1+2x)^{30}$

526. $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1/3}$ **527.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$ **528.** 2^{x+3} **529.** $x10^x$ **530.** $\frac{x}{e^x}$

531. $x^2(x+1)e^x$ **532.** e^{x^2} **533.** e^{e^x} **534.** 10^{2x-3} **535.** 2^{3^x} **536.** $|x|^3$

537. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ **538.** $x^5(x^6-8)^{1/3}$ **539.** $e^{2x+3}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$ **540.** $\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$

541. $\operatorname{sgn}(x)$ **542.** 0 dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$ **543.** x dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$

544. $e^{-|x|}$ **545.** $\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$ **546.** $\{x\}$ **547.** $\{x\}^3$ **548.** e^e **549.** $\frac{\pi^{10}}{x-e}$

550. e^x dla $x<0$, $1+x$ dla $x\geqslant 0$ **551.** x^7+e^2 **552.** $(x+e)^{20}$ **553.** $\operatorname{sgn}\left(x^5-x^3\right)$

554. $\operatorname{arctg}\left(x^{2023}\right)$ **555.** $(\operatorname{arctg}x)^{2023}$ **556.** $\left(\operatorname{arctg}\left(x^{2023}\right)\right)^{2023}$

557. $\left(\operatorname{arctg}\left(x^{2023}+2023\right)\right)^{2023}$ **558.** $\left(x^2+1\right)^{x^2}$ **559.** x^{x^x} **560.** $e^{e^{e^{e^x}}}$

561. $\frac{x^{2023}}{x^{666}+1729}$ **562.** $\sqrt[2023]{x}$ **563.** $\sqrt[666]{x^{37}+1}$ **564.** $\frac{x^{666}}{\sqrt[37]{x^2+1}}$