

405. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0$

b) $a = -2, \quad b = 2, \quad c = 0$

c) $a = \mathbf{NIE}, \quad b = \mathbf{NIE}, \quad c = 3$

d) $a = 2, \quad b = -2, \quad c = 0$

e) $a = -3, \quad b = 3, \quad c = 0$

f) $a = \mathbf{NIE}, \quad b = \mathbf{NIE}, \quad c = 5$

406. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{ x + \frac{1}{2} \right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1$

b) $a = -2, \quad b = 2, \quad c = 2$

c) $a = -3, \quad b = 3, \quad c = 3$

d) $a = 4, \quad b = -4, \quad c = -4$

e) $a = -5, \quad b = 5, \quad c = 5$

f) $a = -6, \quad b = 6, \quad c = 6$

407. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 3, \quad e = 3$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \mathbf{NIE}, \quad d = 4, \quad e = \mathbf{NIE}$

c) $a = 1, \quad b = 3, \quad c = 5, \quad d = 4, \quad e = 5$

d) $a = 2, \quad b = 7, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = 8$

e) $a = 6, \quad b = 7, \quad c = 10, \quad d = 13, \quad e = 10$

f) $a = 6, \quad b = 3, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = 8$

408. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje w **wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 3b$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + 3b = b,$$

czyli

$$a = -2b.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -2b$.

409. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x + 1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, $d = -3$

b) $a = -5$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 3$

c) $a = \mathbf{NIE}$, $b = \mathbf{NIE}$, $c = 3$, $d = 4$

d) $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$, $d = -5$

e) $a = -9$, $b = 3$, $c = 6$, $d = 6$

f) $a = \mathbf{dowolne}$, $b = -6 - a$, $c = 6$, $d = 6$

410. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = -5$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

b) $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$, $d = 4$

c) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, $d = 4$

d) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \mathbf{NIE}$

411. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 5| & \text{dla } a \leq x < b \\ 4 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie:

Oczywiście funkcja f jest ciągła w każdym punkcie różnym od a i b .

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4$$

oraz

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = |a^2 - 5|,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4 = |a^2 - 5|.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do

$$a^2 - 5 = \pm 4,$$

$$a^2 = 5 \pm 4,$$

skąd $a \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Podobnie

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = |b^2 - 5|$$

oraz

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 4,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4 = |b^2 - 5|,$$

czyli $b \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Zatem funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a, b \in \{-3, -1, 1, 3\}$, co w połączeniu z warunkiem $a < b$ prowadzi do sześciu par (a, b) spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez pary $(-3, -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$412. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 3 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 1.$$

$$413. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 4 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -3, \quad b = 3.$$

$$414. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 5 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -5, \quad b = 5.$$

$$415. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 6 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -\sqrt{57}, \quad b = \sqrt{57}.$$

$$416. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 7 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -11, \quad b = 11.$$

417. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$$a = -1, \quad b = 0$$

$$a = -1, \quad b = 1$$

$$a = 0, \quad b = 1$$

418. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$$a = 1, \quad b = 3$$

$$a = 1, \quad b = 7$$

$$a = 1, \quad b = 9$$

$$a = 3, \quad b = 7$$

$$a = 3, \quad b = 9$$

$$a = 7, \quad b = 9$$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$419. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 1.$$

$$420. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 1.$$

$$421. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 2.$$

$$422. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+6 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -2, \quad b = 3.$$

$$423. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 2x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 2.$$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$424. f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x < a & a = -8, & b = 0 \\ 64x & \text{dla } a \leq x < b & a = -8, & b = 8 \\ x^3 & \text{dla } b \leq x & a = 0, & b = 8 \end{cases}$$

$$425. f(x) = \begin{cases} x^6 & \text{dla } x < a & a = -2\sqrt{2}, & b = 0 \\ 64x^2 & \text{dla } a \leq x < b & a = -2\sqrt{2}, & b = 2\sqrt{2} \\ x^6 & \text{dla } b \leq x & a = 0, & b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$426. f(x) = \begin{cases} x^9 & \text{dla } x < a & a = -2, & b = 0 \\ 64x^3 & \text{dla } a \leq x < b & a = -2, & b = 2 \\ x^9 & \text{dla } b \leq x & a = 0, & b = 2 \end{cases}$$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty = \infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$427. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{17}-3)x = -\infty$$

$$428. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{13}-3)x = +\infty$$

$$429. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{17}-3)x = +\infty$$

$$430. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{13}-3)x = -\infty$$

$$431. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{17}-3)^x = +\infty$$

$$432. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{13}-3)^x = 0$$

$$433. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{17}-3)^x = 0$$

$$434. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{13}-3)^x = +\infty$$

$$435. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}x = \pi/2$$

$$436. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}2x = \pi/2$$

$$437. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{17}-4)x = \pi/2$$

$$438. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{13}-4)x = -\pi/2$$

$$439. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64} = 1/48$$

$$440. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{x-64}{\sqrt{x}-8} = 16$$

$$441. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = 1/3$$

$$442. \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{1/x}} = +\infty$$

$$443. \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{1/x}} = 1$$

$$444. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{1/x}} = 2$$

$$445. \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{2^{1/x}}} = +\infty$$

$$446. \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{2^{1/x}}} = 2$$

$$447. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{2^{1/x}}} = 4$$

$$448. \lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_4 x\} = 1$$

$$449. \lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_4 x\} = 0$$

450. $\lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_8 x\} = 1/3$

451. $\lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_8 x\} = 1/3$

452. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$

453. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$

454. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = e^{e^4}$

455. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = e^{e^{27}}$

456. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = 32$

457. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = 9$

458. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = 64$

459. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(x+32) - \log_2(x+4)) = 0$

460. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(x+4)) = 5$

461. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(4x+1)) = 3$

462. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = e^2$

463. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = e^8$

464. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \sqrt{e}$

465. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt[4]{e}$

466. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4 + x^3 + x^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} + \frac{3 \cdot x^2}{4} = \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot x^2}{4} \geq 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned}
 a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1. \\
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + x^3 + x^2) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1 + x^{-1} + x^{-2}} + 1 \right)} = \frac{1}{(1+1) \cdot (1+1)} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^4 - t^4}{(s+t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[4]{x^4}$.

$$\begin{aligned}
 a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{\frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} + x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + x^3 + x^2) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + x^2 \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{x} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^3 + x^2}}{x^2} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^3 + x^2}}{\sqrt{x^4}} + 1 \right)} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}-1\right) \cdot \left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)} = \frac{1}{(-1-1) \cdot (1+1)} = -\frac{1}{4}.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t = \frac{s^4-t^4}{(s-t) \cdot (s^2+t^2)}.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + \frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = -x - \frac{1}{4}$.

467. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 2x)^2 + 2x^2 + 1 > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1\right)} = \\ &= \frac{4}{(1+1) \cdot (1+1)} = 1. \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^4 - t^4}{(s + t) \cdot (s^2 + t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[4]{x^4}$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt[4]{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1) - x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} + x^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{x^2} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{-\sqrt[4]{x^4}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}}{\sqrt{x^4}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 6x^{-1} + x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1 + 4x^{-1} + 6x^{-2} + x^{-4}} + 1 \right)} = \\ &= \frac{4}{(-1 - 1) \cdot (1 + 1)} = -1. \end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s + t = \frac{s^4 - t^4}{(s - t) \cdot (s^2 + t^2)}$$

przy $s = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1} > 0$ i $t = x < 0$, a więc w sytuacji, gdy $s - t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = -x - 1$.

468. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^8 + x^7 + x^6 + 7 = \left(x^4 + \frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{3x^6}{4} + 7 > 0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt[8]{\frac{x^8 + x^7 + x^6 + 7}{x^8}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^8 + x^7 + x^6 + 7) - x^8}{(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x) \cdot (\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^2) \cdot (\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + x^6 + 7}{(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x) \cdot (\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^2) \cdot (\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{(\sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1)} = \\ &= \frac{1}{(1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s - t = \frac{s^8 - t^8}{(s+t) \cdot (s^2+t^2) \cdot (s^4+t^4)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x \rightarrow -\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x < 0$, a w konsekwencji $x = -|x| = -\sqrt[8]{x^8}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{-\sqrt[8]{x^8}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt[8]{\frac{x^8 + x^7 + x^6 + 7}{x^8}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} \right) = 1 - 1 = 0. \\
&b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^8 + x^7 + x^6 + 7) - x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} - x \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^2 \right) \cdot \left(\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^4 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + x^6 + 7}{\left(\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} - x \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^2 \right) \cdot \left(\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7} + x^4 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x^2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{x^4} + 1 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{-\sqrt[8]{x^8}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{\sqrt[4]{x^8}} + 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + 7}}{\sqrt{x^8}} + 1 \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^7}}{\left(-\sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^8}} + 1 \right)} = \\
&= \frac{1}{(-1-1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)} = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s + t = \frac{s^8 - t^8}{(s - t) \cdot (s^2 + t^2) \cdot (s^4 + t^4)}$$

przy $s = \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7} > 0$ i $t = x < 0$, a więc w sytuacji, gdy $s - t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y = 2x + \frac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y = -\frac{1}{8}$.