

10. Granica funkcji.

**Zadania do omówienia¹ na ćwiczeniach
w czwartek 5.12.2024 i w poniedziałek 9.12.2024.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

405. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = \dots, \quad c = \dots$

b) $a = \dots, \quad b = 2, \quad c = \dots$

c) $a = \dots, \quad b = \dots, \quad c = 3$

d) $a = 2, \quad b = \dots, \quad c = \dots$

e) $a = \dots, \quad b = 3, \quad c = \dots$

f) $a = \dots, \quad b = \dots, \quad c = 5$

406. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{ x + \frac{1}{2} \right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = \dots, \quad c = \dots$

b) $a = \dots, \quad b = 2, \quad c = \dots$

c) $a = \dots, \quad b = \dots, \quad c = 3$

d) $a = 4, \quad b = \dots, \quad c = \dots$

e) $a = \dots, \quad b = 5, \quad c = \dots$

f) $a = \dots, \quad b = \dots, \quad c = 6$

407. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \dots, \quad e = \dots$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \dots, \quad d = 4, \quad e = \dots$

c) $a = 1, \quad b = \dots, \quad c = \dots, \quad d = 4, \quad e = 5$

d) $a = \dots, \quad b = 7, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = \dots$

e) $a = 6, \quad b = 7, \quad c = \dots, \quad d = \dots, \quad e = 10$

f) $a = 6, \quad b = \dots, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = \dots$

¹Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

408. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{x\} + b \cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje w **wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

409. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x + 1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1$, $b = 2$, $c = \dots$, $d = \dots$

b) $a = \dots$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \dots$

c) $a = \dots$, $b = \dots$, $c = 3$, $d = 4$

d) $a = 2$, $b = 3$, $c = \dots$, $d = \dots$

e) $a = \dots$, $b = 3$, $c = 6$, $d = \dots$

f) $a = \dots$, $b = \dots$, $c = 6$, $d = 6$

410. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = \dots$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

b) $a = 1$, $b = \dots$, $c = 3$, $d = 4$

c) $a = 1$, $b = 2$, $c = \dots$, $d = 4$

d) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = \dots$

411. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 5| & \text{dla } a \leq x < b \\ 4 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$412. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 3 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$413. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 4 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$414. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 5 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$415. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 6 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$416. f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } x < a \\ 7 & \text{dla } a \leq x < b \\ \log_2(x^2 + 7) & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

417. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

418. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , gdzie $a < b$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$419. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$420. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$421. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$422. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+6 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

$$423. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 2x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a < b$, aby funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

$$424. f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x < a \\ 64x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^3 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad \begin{array}{ll} a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \\ a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \\ a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \end{array}$$

$$425. f(x) = \begin{cases} x^6 & \text{dla } x < a \\ 64x^2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^6 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad \begin{array}{ll} a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \\ a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \\ a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \end{array}$$

$$426. f(x) = \begin{cases} x^9 & \text{dla } x < a \\ 64x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^9 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad \begin{array}{ll} a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \\ a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \\ a = \dots\dots\dots, & b = \dots\dots\dots \end{array}$$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty = \infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

427. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{17}-3)x = \dots\dots\dots$

428. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{13}-3)x = \dots\dots\dots$

429. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{17}-3)x = \dots\dots\dots$

430. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{13}-3)x = \dots\dots\dots$

431. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{17}-3)^x = \dots\dots\dots$

432. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{13}-3)^x = \dots\dots\dots$

433. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{17}-3)^x = \dots\dots\dots$

434. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{13}-3)^x = \dots\dots\dots$

435. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}x = \dots\dots\dots$

436. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}2x = \dots\dots\dots$

437. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{17}-4)x = \dots\dots\dots$

438. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{13}-4)x = \dots\dots\dots$

439. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64} = \dots\dots\dots$

440. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x-64}{\sqrt{x}-8} = \dots\dots\dots$

441. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = \dots\dots\dots$

442. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots\dots$

443. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots\dots$

444. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{1/x}} = \dots\dots\dots$

445. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{2^{2^{1/x}}} = \dots\dots\dots$

446. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2^{2^{1/x}}} = \dots\dots\dots$

447. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{2^{2^{1/x}}} = \dots\dots\dots$

448. $\lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_4 x\} = \dots\dots\dots$

449. $\lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_4 x\} = \dots\dots\dots$

450. $\lim_{x \rightarrow 16^-} \{\log_8 x\} = \dots\dots\dots$

451. $\lim_{x \rightarrow 16^+} \{\log_8 x\} = \dots\dots\dots$

452. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \dots\dots\dots$

453. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \dots\dots\dots$

454. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = \dots$

455. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = \dots$

456. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{54^{3x}} = \dots\dots\dots$

457. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2^{54^x}} = \dots\dots\dots$

458. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \dots\dots\dots$

459. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(x+32) - \log_2(x+4)) = \dots\dots\dots$

460. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(x+4)) = \dots\dots\dots$

461. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(32x+1) - \log_2(4x+1)) = \dots\dots\dots$

462. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \dots\dots\dots$

463. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \dots\dots\dots$

464. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \dots\dots\dots$

465. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \dots\dots\dots$

466. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2}.$$

467. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

468. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + \sqrt[8]{x^8 + x^7 + x^6 + 7}$.

469. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_4(2^x + 8^x).$$

Wyznaczyć wartości granic ciągów:

470. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)$

471. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2024} \right)$

472. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2024n+1} \right)$

473. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2024}$

474. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2024} \right)^{2024}$

475. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2024n+1} \right)^{2024}$

476. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$

477. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2024n}$

478. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n/2024}$

479. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^{2024}}$

480. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\pi}{n} \right)^n$

481. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^n$

482. Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \cdot \frac{14n+1}{15n+1} \right)^n$$

dla takiej wartości rzeczywistej dodatniej parametru a , aby granica była dodatnia i skończona.

483. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_2(2^{2x} - 2^{4x+1} + 2^{6x}).$$

484. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x}{2}.$$

485. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}.$$

486. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} + |x|.$$