Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w czwartek 3.10.2024, poniedziałek 7.10.2024 i czwartek 10.10.2024.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

0. Zadania wstępne.

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Oblicz wartości wyrażeń (doprowadź wynik do możliwie prostej postaci):

1. $\sum\limits_{i=3}^{5} i^2$ **2.** $\sum\limits_{i=-99}^{100} i^3$ **3.** $\sum\limits_{i=-10}^{10} 7$ **4.** $\sum\limits_{i=1}^{100} i$ **5.** $\sum\limits_{i=1}^{24} i^2$ **6.** $\prod\limits_{i=1}^{6} i$ **7.** $\prod\limits_{i=-2024}^{2024} i^{2024}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{9799} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$ **10.** $\sum\limits_{n=1}^{47} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}$

11. $\prod\limits_{n=1}^{2024} \left(1+\frac{1}{n}\right)$ **12.** $\sum\limits_{n=2}^{7} \log_6 \log_n (n+2)$ **13.** $\prod\limits_{m=2}^{2024} \prod\limits_{n=1}^{m-1} \left(\sqrt[m]{m} - \sqrt[n]{n}\right)$

14. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2-2, \quad 3465^2-4, \quad 3465^2-8, \quad 3465^2-16, \quad 3465^2-32, \quad 3465^2-64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

15. Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x>0 \Rightarrow x+1>2$ **b)** $x<1 \Rightarrow x^2>0$ **c)** $x<1 \Rightarrow x^2<0$ **d)** $x^5>32 \Rightarrow x^6>64$

e) $x^6>64 \Rightarrow x^7>128$ **f)** $x^5<32 \Rightarrow x^6<64$ **g)** $x^6<64 \Rightarrow x^7<128$

16. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2 \ .$$

17. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot (n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)} \ .$$

18. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{n^3}\leqslant\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)} \ .$$

19. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n}{n}<7^n \ .$$

Oszustwo **20.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n<2^n+110\,. \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$.

2° Załóżmy, że $30n<2^n+110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1)<2^{n+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1)=30n+30<2^n+110+30=2^{n+1}+110+30-2^n<2^{n+1}+110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n\geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n\geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$,

dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$,

dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180<174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

21. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\ldots=F_{n+1}\,,$$

gdzie F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego określonego wzorami $F_1=F_2=1$ oraz $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

Wyznacz liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających podane warunki.

W poniższych zadaniach przyjęto oznaczenie $\mathbb{N}_k=\{k,k+1,k+2,\ldots\}$.

22. $99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

23. $11\notin A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

24. $99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}_7}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

25. $11\notin A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}_7}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

26. $11\notin A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}_{77}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+1)\in A)$

27. $22\in A,\quad 99\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$

28. $1\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A)$

29. $1\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+4)\in A)$

30. $1\in A,\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+4)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+5)\in A)$

31. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(2n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

32. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(3n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

33. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(3n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_9}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-8)\in A)$

34. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(3n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_{14}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-13)\in A)$

35. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(2n)\in A),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_{32}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-31)\in A)$

36. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^3\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_6}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-5)\in A)$

37. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_6}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-5)\in A)$

38. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

39. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5+1\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

40. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5+2\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

41. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left(n\in A\Rightarrow\left(n^5+3\right)\in A\right),\quad \underset{n\in\mathbb{N}_8}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n-7)\in A)$

Zadania do samodzielnego przeanalizowania. Mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

---

42. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

43. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}.$$

44. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k<n$ spełniających równanie

$$k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}.$$

45. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}.$$

46. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n.$$

47. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}.$$

48. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}.$$

49. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4)\cdot\binom{2n}{n}>2^{2n+1}.$$

50. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$n\cdot\binom{2n}{n}^2 \geqslant 4^{2n-1}\,.$$

51. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n\,.$$

52. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n\,.$$

53. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\sqrt[n]{25}\cdot\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27}\cdot\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}\,.$$

54. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{65}\cdot n \leqslant 2^n+2^{71}\,.$$

55. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{2n}\cdot\binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}\,.$$

56. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$3^{28}\cdot n \leqslant 3^n+3^{31}\,.$$

57. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$n\cdot\binom{6n}{2n}\cdot\binom{4n}{n} < (n+1)\cdot\binom{6n}{3n}\cdot\binom{3n}{n}\,.$$

58. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2}\,.$$