

Indukcja matematyczna.

Podstawowy schemat dowodu indukcyjnego wygląda następująco:

1° Sprawdzamy, że prawdziwe jest $T(1)$.

2° Dowodzimy, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Rightarrow T(n+1).$$

3° Na podstawie 1° i 2° wyciągamy wniosek, że zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

Założmy, że w dowodzie własności oznaczonej jako $T(n)$:

1° Sprawdziliśmy, że prawdziwe jest $T(1)$.

2° Udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Rightarrow T(n+1).$$

A więc udowodniliśmy następujące implikacje:

- $T(1) \Rightarrow T(2)$,
- $T(2) \Rightarrow T(3)$,
- $T(3) \Rightarrow T(4)$,
- $T(4) \Rightarrow T(5)$,
- $T(5) \Rightarrow T(6)$,

i t.d.

Możemy na podstawie tych implikacji wyciągać kolejno następujące wnioski:

- $T(1) \Rightarrow T(2)$ — wniosek: skoro sprawdziliśmy $T(1)$, to prawdziwe jest $T(2)$,
- $T(2) \Rightarrow T(3)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(2)$, to prawdziwe jest $T(3)$,
- $T(3) \Rightarrow T(4)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(3)$, to prawdziwe jest $T(4)$,
- $T(4) \Rightarrow T(5)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(4)$, to prawdziwe jest $T(5)$,
- $T(5) \Rightarrow T(6)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(5)$, to prawdziwe jest $T(6)$,

i t.d.

Łatwo wyobrazić sobie, że tak jak powyżej mamy wyraźnie wypisane wszystkie przesłanki wystarczające do dowodu $T(6)$, podobnie można byłoby pracowicie wypisać wszystkie implikacje i płynące kolejno z nich wnioski składające się na dowód $T(100)$.

Wyobrażamy sobie, jak wyglądałaby podobna lista implikacji dowodząca prawdziwości $T(10^{100})$, chociaż ich wypisanie jest fizycznie niemożliwe.

I podobnie, dla dowolnej liczby naturalnej n , wyobrażamy sobie jak wygląda łańcuszek wyników stanowiący dowód prawdziwości $T(n)$.

Indukcja wsteczna w dowodzie nierówności między średnimi.

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n oraz każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Powyższe zadanie jest nie tylko zadankiem do rozwiązania, ale jego teza jest ważną nierównością, a mianowicie nierównością między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną. Teza zadania mówi, że średnia geometryczna nie przekracza średniej arytmetycznej. Dodajmy jeszcze, że w powyższej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_1, a_2, \dots, a_n są równe. Nie będziemy tego dowodzić, aby dodatkowo nie komplikować dowodu, ale wystarczyłoby dokładnie prześledzić zaprezentowany poniżej dowód i zobaczyć, kiedy możliwa jest równość.

Jak nietrudno się domyślić, przeprowadzimy dowód indukcyjny, ale indukcja będzie przebiegać w dość nietypowy sposób. W dowodzie indukcyjnym zajmijmy się zdaniem $T(n)$, które brzmi następująco:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

1° Na początek w dobrej wierze zajmijmy się przypadkiem $n = 1$. Zdanie $T(1)$ przybiera postać:

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a_1 zachodzi nierówność

$$a_1 \leq a_1.$$

Powyższe zdanie jest oczywiście prawdziwe, chociaż, mówiąc delikatnie, nie niesie zbyt głębokiej treści.

2° Przypatrzmy się teraz $n = 2$. Zdanie $T(2)$ brzmi:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Powyższą nierówność udowodnimy przekształcając ją do kolejnych postaci równoważnych:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{a_1 a_2} &\leq a_1 + a_2, \\ 4a_1 a_2 &\leq a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2, \\ 0 &\leq a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2, \\ 0 &\leq (a_1 - a_2)^2, \end{aligned}$$

co jest prawdą, gdyż kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Gdyby miało nam się udać przeprowadzenie w prosty sposób standardowego dowodu indukcyjnego, to powinniśmy udowodnić implikacje $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ dla wszystkich n . W szczególności byłby tam dowód implikacji $T(2) \Rightarrow T(3)$. Czyli z nierówności między średnimi dla dowolnych 2 liczb powinniśmy jakimś sposobem wywnioskować nierówność między średnimi dla 3 liczb. Wydaje się, że do tego potrzebna byłaby umiejętność wyrażenia średniej, powiedzmy arytmetycznej, 3 liczb, przez operację brania średniej 2 liczb. To jednak nie jest możliwe. Na przykład średnia arytmetyczna trzech liczb: 1, 2, 4 jest równa $7/3$, a wielokrotne obliczanie średniej arytmetycznej dwóch liczb, stosowane do liczb 1, 2, 4 oraz wszelakich średnich powstałych po drodze, może nas doprowadzić jedynie do liczb wymiernych, których mianownik jest potęgą dwójki. Mając więc maszynkę, która oblicza średnią arytmetyczną dwóch liczb i wrzucając do niej liczby 1, 2, 4, nigdy nie otrzymamy liczby $7/3$, nawet jak maszynka będzie liczyć średnie tych liczb i średnie ich średnich i średnie średnich średnich w najrozmaitszych kombinacjach.

Takie argumenty powinny wystarczająco zniechęcić do podejmowania próby przeprowadzenia standardowego dowodu indukcyjnego.

Zauważmy jednak, że obliczanie średniej (jakiegokolwiek: arytmetycznej, geometrycznej czy innej sensownej) czterech liczb da się przeprowadzić poprzez obliczanie średniej dwóch liczb — po prostu liczymy średnią dwóch średnich par liczb:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}.$$

Ogólniej: jeśli mamy prostokątną tablicę liczb, to ich średnia jest średnią średnich liczonych w kolumnach (lub jak kto woli średnią średnich liczonych w wierszach).

To prowadzi do pomysłu, aby udowodnić implikację $T(n) \Rightarrow T(2n)$.

3° Udowodnimy więc, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Rightarrow T(2n).$$

W tym celu zakładamy $T(n)$:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Przy powyższym założeniu dowodzimy $T(2n)$:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_{2n} zachodzi nierówność

$$\sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n}.$$

Wychodzimy od lewej strony dowodzonej nierówności i dochodzimy do strony prawej korzystając dwukrotnie z zakładanego $T(n)$ oraz z udowodnionego wcześniej $T(2)$:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{n}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}}{n}}{2} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_{2n}}{2n} = P.$$

Doprecyzujemy, że z nierówności między średnimi n liczb skorzystaliśmy dwukrotnie: dla liczb a_1, a_2, \dots, a_n oraz dla liczb $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}$. Ponadto skorzystaliśmy z nierówności między średnimi dla 2 liczb:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \quad \text{oraz} \quad \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}}{n}.$$

Podsumujmy, co w tej chwili mamy. Udowodniliśmy $T(1)$, $T(2)$ oraz wszystkie implikacje $T(n) \Rightarrow T(2n)$ dla liczb naturalnych n . To raczej nie dowodzi prawdziwości $T(n)$ dla wszystkich n . Ale dla których n taki dowód już mamy?

Wśród implikacji $T(n) \Rightarrow T(2n)$ mamy w szczególności:

$T(2) \Rightarrow T(4)$, co wobec udowodnionego $T(2)$ daje $T(4)$,

$T(3) \Rightarrow T(6)$, co wobec braku dowodu $T(3)$ niczego nie daje,

$T(4) \Rightarrow T(8)$, co wobec udowodnionego $T(4)$ daje $T(8)$,

$T(8) \Rightarrow T(16)$, co wobec udowodnionego $T(8)$ daje $T(16)$,

$T(16) \Rightarrow T(32)$, co wobec udowodnionego $T(16)$ daje $T(32)$...

Udowodniliśmy więc $T(n)$ dla n będących potęgami dwójki. Czyli dla dowolnie dużych, ale tylko niektórych n .

Dowód indukcyjny dopełni się, jeśli będziemy mogli schodzić w dół.

4° Udowodnimy zatem, że implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

W tym celu zakładamy $T(n)$:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Przy powyższym założeniu dowodzimy $T(n-1)$:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_{n-1} zachodzi nierówność

$${}^{n-1}\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}.$$

Mamy więc danych $n-1$ liczb: a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . I chcemy coś udowodnić o ich średnich, ale możemy wykorzystać założenie indukcyjne, które używa n liczb. Gdzie znaleźć brakującą n -tą liczbę? Otóż średnia (jakakolwiek sensowna) układu liczb nie zmieni się, jeśli dołożymy do tego układu liczbę równą średniej. Oczekujemy więc, że dołożenie do liczb a_1, a_2, \dots, a_{n-1} ich średniej geometrycznej

$$a_n = {}^{n-1}\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

doprowadzi nas do układu n liczb a_1, a_2, \dots, a_n o tej samej średniej geometrycznej.

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}} = \\ &= (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)}} = (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}.\end{aligned}$$

Wobec tego możemy zastosować założenie indukcyjne do liczb a_1, a_2, \dots, a_n . Otrzymamy:

$$a_n = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

czyli

$$a_n \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Proste przekształcenia powyższej nierówności dają kolejno

$$\frac{n-1}{n} \cdot a_n \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n},$$

$$a_n \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1},$$

$$\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}.$$

A to jest nierówność, którą mieliśmy udowodnić.

Podsumujmy: Udowodniliśmy $T(1)$, $T(2)$, wszystkie implikacje $T(n) \Rightarrow T(2n)$ oraz wszystkie implikacje $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Jeśli wyobrazimy sobie powstały schemat wyników, zobaczymy, że tymi implikacjami można dojść do każdej liczby naturalnej, a więc taka pokraczna indukcja też działa.

Jeśli ktoś nadal nie jest przekonany, że taki schemat indukcyjny jest poprawny, niech sobie wyobrazi grę planszową o następujących regułach:

- plansza ma nieskończenie wiele pól ponumerowanych liczbami naturalnymi,
- można postawić pionek na polu z numerem 1,
- można postawić pionek na polu z numerem 2,
- można przesunąć pionek z pola numer n na pole numer $2n$,
- można przesunąć pionek z pola numer n na pole numer $n-1$.

Czy zgodnie z tymi regułami pionek może się znaleźć na dowolnym polu?