

ANALIZA 1

18 grudnia 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Niech $G(k) = \sup \{ \sqrt{n^2 + 10n + k} - n : n \in \mathbb{N} \}$. Wtedy:

- a) $G(22) = \dots\dots\dots$ b) $G(24) = \dots\dots\dots$
 c) $G(26) = \dots\dots\dots$ d) $G(28) = \dots\dots\dots$

2. Niech $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{n^2 - 100n + k} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

- a) $G(2560) = \dots\dots\dots$ b) $G(2530) = \dots\dots\dots$
 c) $G(2460) = \dots\dots\dots$ d) $G(2430) = \dots\dots\dots$

3. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

- a) $G(16, 25) = \dots\dots\dots$ b) $G(9, 16) = \dots\dots\dots$
 c) $G(81, 100) = \dots\dots\dots$ d) $G(25, 36) = \dots\dots\dots$

4. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1} + \frac{2n+2}{n^2+2n+2} + \dots + \frac{2n+k}{n^2+2n+k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

- a) $G(10) = \dots\dots\dots$ b) $G(4) = \dots\dots\dots$
 c) $G(6) = \dots\dots\dots$ d) $G(8) = \dots\dots\dots$

5. Niech $S(k, m) = \sum_{n=k}^m \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+n} + \sqrt[3]{n^2+2n+1}}$. Podaj w postaci uproszczonej:

- a) $S(1, 63) = \dots\dots\dots$
- b) $S(1, 26) = \dots\dots\dots$
- c) $S(3, 80) = \dots\dots\dots$
- d) $S(5, 4999) = \dots\dots\dots$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

- a) $13, 16 \in A \dots\dots\dots$
- b) $12, 15 \in A \dots\dots\dots$
- c) $11, 14 \in A \dots\dots\dots$
- d) $10, 13 \in A \dots\dots\dots$

7. Niech $f_n(x) = \sqrt{nx+1}$. Podaj wartość pochodnej.

- a) $f'_{12}(2) = \dots\dots\dots$
- b) $f'_{24}(1) = \dots\dots\dots$
- c) $f'_6(4) = \dots\dots\dots$
- d) $f'_8(3) = \dots\dots\dots$

8. Podaj wartość pochodnej funkcji f określonej danym wzorem.

- a) $f(x) = \sqrt[3]{31x^2+1} \quad f'(2) = \dots\dots\dots$
- b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+4} \quad f'(11) = \dots\dots\dots$
- c) $f(x) = \sqrt[3]{30x^2+5} \quad f'(2) = \dots\dots\dots$
- d) $f(x) = \sqrt[3]{120x^2+5} \quad f'(1) = \dots\dots\dots$

9. Niech $f_n(x) = x \cdot \sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej.

- a) $f'_2(4) = \dots\dots\dots$ b) $f'_3(8) = \dots\dots\dots$
 c) $f'_4(16) = \dots\dots\dots$ d) $f'_5(32) = \dots\dots\dots$

10. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + 3)$. Podaj wartość pochodnej.

- a) $f'_5(2) = \dots\dots\dots$ b) $f'_4(2) = \dots\dots\dots$
 c) $f'_3(2) = \dots\dots\dots$ d) $f'_2(2) = \dots\dots\dots$

11. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^4+n+1} + \frac{4n+8}{n^4+4n+8} + \dots + \frac{k^2n+k^3}{n^4+k^2n+k^3} + \dots + \frac{pn^3}{n^4+pn^3} \right).$$

Wówczas

- a) $G(12) = \dots\dots\dots$ b) $G(2) = \dots\dots\dots$
 c) $G(80) = \dots\dots\dots$ d) $G(36) = \dots\dots\dots$

12. Niech $f_n(x) = g(g(g(\dots g(g(x))\dots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g , gdzie $g(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)^3$. Podaj wartość pochodnej.

- a) $f'_6(125) = \dots\dots\dots$ b) $f'_8(8) = \dots\dots\dots$
 c) $f'_{27}(27) = \dots\dots\dots$ d) $f'_{16}(64) = \dots\dots\dots$

13. Niech $f_n(x) = g(g(g(\dots g(g(x))\dots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g , gdzie $g(x) = \ln(e^x + 7)$. Podaj wartość pochodnej w zerze.

- a) $f'_3(0) = \dots\dots\dots$ b) $f'_{10}(0) = \dots\dots\dots$
 c) $f'_7(0) = \dots\dots\dots$ d) $f'_{111}(0) = \dots\dots\dots$