ANALIZA 1 18 grudnia 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Niech $G(k)=\sup\left\{\sqrt{n^2+10n+k}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(22)=\mathbf{5}$

b) $G(24)=\mathbf{5}$

c) $G(26)=\boldsymbol{\sqrt{37}-1}$

d) $G(28)=\boldsymbol{\sqrt{39}-1}$

2. Niech $G(k)=\sup\left\{\frac{1}{n^2-100n+k}:\, n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(2560)=\mathbf{1/60}$

b) $G(2530)=\mathbf{1/30}$

c) $G(2460)=\mathbf{1/9}$

d) $G(2430)=\mathbf{1/11}$

3. Niech $G(a,b)=\sup\left\{\frac{mn}{am^2+bn^2}:\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(16,25)=\mathbf{1/40}$

b) $G(9,16)=\mathbf{1/24}$

c) $G(81,100)=\mathbf{1/180}$

d) $G(25,36)=\mathbf{1/60}$

4. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1}+\frac{2n+2}{n^2+2n+2}+\ldots+\frac{2n+k}{n^2+2n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{48}$

b) $G(4)=\mathbf{6}$

c) $G(6)=\mathbf{16}$

d) $G(8)=\mathbf{30}$

5. Niech $S(k,m)=\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(1,63)=\mathbf{3}$

b) $S(1,26)=\mathbf{2}$

c) $S(3,80)=\mathbf{2\sqrt[3]{3}}$

d) $S(5,4999)=\mathbf{9\sqrt[3]{5}}$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $13{,}16\in A$ **56**

b) $12{,}15\in A$ **48**

c) $11{,}14\in A$ **42**

d) $10{,}13\in A$ **35**

7. Niech $f_n(x)=\sqrt{nx+1}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f'_{12}(2)=\mathbf{6/5}$

b) $f'_{24}(1)=\mathbf{12/5}$

c) $f'_{6}(4)=\mathbf{3/5}$

d) $f'_{8}(3)=\mathbf{4/5}$

8. Podaj wartość pochodnej funkcji f określonej danym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt[3]{31x^2+1}$ $f'(2)=\mathbf{124/75}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$ $f'(11)=\mathbf{22/75}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{30x^2+5}$ $f'(2)=\mathbf{8/5}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{120x^2+5}$ $f'(1)=\mathbf{16/5}$

9. Niech $f_n(x)=x\cdot\sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_2'(4)=\mathbf{3}$

b) $f_3'(8)=\mathbf{8/3}$

c) $f_4'(16)=\mathbf{5/2}$

d) $f_5'(32)=\mathbf{12/5}$

10. Niech $f_n(x)=\ln(x^n+3)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_5'(2)=\mathbf{16/7}$

b) $f_4'(2)=\mathbf{32/19}$

c) $f_3'(2)=\mathbf{12/11}$

d) $f_2'(2)=\mathbf{4/7}$

11. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^4+n+1}+\frac{4n+8}{n^4+4n+8}+\ldots+\frac{k^2n+k^3}{n^4+k^2n+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$

Wówczas

a) $G(12)=\mathbf{20/3}$

b) $G(2)=\mathbf{7/12}$

c) $G(80)=\mathbf{256/3}$

d) $G(36)=\mathbf{117/4}$

12. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_6'(125)=\mathbf{121/25}$

b) $f_8'(8)=\mathbf{25}$

c) $f_{27}'(27)=\mathbf{100}$

d) $f_{16}'(64)=\mathbf{25}$

13. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\ln(e^x+7)$. Podaj wartość pochodnej w zerze.

a) $f_3'(0)=\mathbf{1/22}$

b) $f_{10}'(0)=\mathbf{1/71}$

c) $f_7'(0)=\mathbf{1/50}$

d) $f_{111}'(0)=\mathbf{1/778}$

ANALIZA 1 18 grudnia 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Niech $G(k)=\sup\left\{\sqrt{n^2+10n+k}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(26)=\boldsymbol{\sqrt{37}-1}$

b) $G(24)=\mathbf{5}$

c) $G(22)=\mathbf{5}$

d) $G(28)=\boldsymbol{\sqrt{39}-1}$

2. Niech $G(k)=\sup\left\{\frac{1}{n^2-100n+k}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(2430)=\mathbf{1/11}$

b) $G(2460)=\mathbf{1/9}$

c) $G(2560)=\mathbf{1/60}$

d) $G(2530)=\mathbf{1/30}$

3. Niech $G(a,b)=\sup\left\{\frac{mn}{am^2+bn^2}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(81,100)=\mathbf{1/180}$

b) $G(16,25)=\mathbf{1/40}$

c) $G(9,16)=\mathbf{1/24}$

d) $G(25,36)=\mathbf{1/60}$

4. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1}+\frac{2n+2}{n^2+2n+2}+\ldots+\frac{2n+k}{n^2+2n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{48}$

b) $G(8)=\mathbf{30}$

c) $G(6)=\mathbf{16}$

d) $G(4)=\mathbf{6}$

5. Niech $S(k,m)=\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(3,80)=\mathbf{2\sqrt[3]{3}}$

b) $S(1,26)=\mathbf{2}$

c) $S(1,63)=\mathbf{3}$

d) $S(5,4999)=\mathbf{9\sqrt[3]{5}}$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $10,13\in A$ **35**

b) $11,14\in A$ **42**

c) $13,16\in A$ **56**

d) $12,15\in A$ **48**

7. Niech $f_n(x)=\sqrt{nx+1}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_6'(4)=\mathbf{3/5}$

b) $f_{12}'(2)=\mathbf{6/5}$

c) $f_{24}'(1)=\mathbf{12/5}$

d) $f_8'(3)=\mathbf{4/5}$

8. Podaj wartość pochodnej funkcji f określonej danym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt[3]{31x^2+1}$ $f'(2)=\mathbf{124/75}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{120x^2+5}$ $f'(1)=\mathbf{16/5}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{30x^2+5}$ $f'(2)=\mathbf{8/5}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$ $f'(11)=\mathbf{22/75}$

9. Niech $f_n(x)=x\cdot\sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_4'(16)=\mathbf{5/2}$ b) $f_3'(8)=\mathbf{8/3}$

c) $f_2'(4)=\mathbf{3}$ d) $f_5'(32)=\mathbf{12/5}$

10. Niech $f_n(x)=\ln(x^n+3)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_2'(2)=\mathbf{4/7}$ b) $f_3'(2)=\mathbf{12/11}$

c) $f_5'(2)=\mathbf{16/7}$ d) $f_4'(2)=\mathbf{32/19}$

11. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^4+n+1}+\frac{4n+8}{n^4+4n+8}+\ldots+\frac{k^2n+k^3}{n^4+k^2n+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$

Wówczas

a) $G(80)=\mathbf{256/3}$ b) $G(12)=\mathbf{20/3}$

c) $G(2)=\mathbf{7/12}$ d) $G(36)=\mathbf{117/4}$

12. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_6'(125)=\mathbf{121/25}$ b) $f_{16}'(64)=\mathbf{25}$

c) $f_{27}'(27)=\mathbf{100}$ d) $f_8'(8)=\mathbf{25}$

13. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\ln(e^x+7)$. Podaj wartość pochodnej w zerze.

a) $f_{111}'(0)=\mathbf{1/778}$ b) $f_{10}'(0)=\mathbf{1/71}$

c) $f_7'(0)=\mathbf{1/50}$ d) $f_3'(0)=\mathbf{1/22}$

ANALIZA 1 18 grudnia 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Niech $G(k)=\sup\left\{\sqrt{n^2+10n+k}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(26)=\boldsymbol{\sqrt{37}-1}$

b) $G(22)=\mathbf{5}$

c) $G(28)=\boldsymbol{\sqrt{39}-1}$

d) $G(24)=\mathbf{5}$

2. Niech $G(k)=\sup\left\{\dfrac{1}{n^2-100n+k}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(2560)=\mathbf{1/60}$

b) $G(2460)=\mathbf{1/9}$

c) $G(2430)=\mathbf{1/11}$

d) $G(2530)=\mathbf{1/30}$

3. Niech $G(a,b)=\sup\left\{\dfrac{mn}{am^2+bn^2}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(9,16)=\mathbf{1/24}$

b) $G(16,25)=\mathbf{1/40}$

c) $G(81,100)=\mathbf{1/180}$

d) $G(25,36)=\mathbf{1/60}$

4. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1}+\frac{2n+2}{n^2+2n+2}+\ldots+\frac{2n+k}{n^2+2n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{48}$

b) $G(6)=\mathbf{16}$

c) $G(8)=\mathbf{30}$

d) $G(4)=\mathbf{6}$

5. Niech $S(k,m)=\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(3,80)=\mathbf{2\sqrt[3]{3}}$ b) $S(1,63)=\mathbf{3}$

c) $S(5,4999)=\mathbf{9\sqrt[3]{5}}$ d) $S(1,26)=\mathbf{2}$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $13{,}16\in A$ **56** b) $11{,}14\in A$ **42**

c) $10{,}13\in A$ **35** d) $12{,}15\in A$ **48**

7. Niech $f_n(x)=\sqrt{nx+1}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_{24}'(1)=\mathbf{12/5}$ b) $f_{12}'(2)=\mathbf{6/5}$

c) $f_6'(4)=\mathbf{3/5}$ d) $f_8'(3)=\mathbf{4/5}$

8. Podaj wartość pochodnej funkcji f określonej danym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt[3]{31x^2+1}$ $f'(2)=\mathbf{124/75}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{30x^2+5}$ $f'(2)=\mathbf{8/5}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{120x^2+5}$ $f'(1)=\mathbf{16/5}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$ $f'(11)=\mathbf{22/75}$

9. Niech $f_n(x)=x\cdot\sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_4'(16)=\mathbf{5/2}$ b) $f_2'(4)=\mathbf{3}$

c) $f_5'(32)=\mathbf{12/5}$ d) $f_3'(8)=\mathbf{8/3}$

10. Niech $f_n(x)=\ln(x^n+3)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_5'(2)=\mathbf{16/7}$ b) $f_3'(2)=\mathbf{12/11}$

c) $f_2'(2)=\mathbf{4/7}$ d) $f_4'(2)=\mathbf{32/19}$

11. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^4+n+1}+\frac{4n+8}{n^4+4n+8}+\ldots+\frac{k^2n+k^3}{n^4+k^2n+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(2)=\mathbf{7/12}$ b) $G(12)=\mathbf{20/3}$

c) $G(80)=\mathbf{256/3}$ d) $G(36)=\mathbf{117/4}$

12. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_6'(125)=\mathbf{121/25}$ b) $f_{27}'(27)=\mathbf{100}$

c) $f_{16}'(64)=\mathbf{25}$ d) $f_8'(8)=\mathbf{25}$

13. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\ln(e^x+7)$. Podaj wartość pochodnej w zerze.

a) $f_7'(0)=\mathbf{1/50}$ b) $f_3'(0)=\mathbf{1/22}$

c) $f_{111}'(0)=\mathbf{1/778}$ d) $f_{10}'(0)=\mathbf{1/71}$

ANALIZA 1 18 grudnia 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Niech $G(k)=\sup\left\{\sqrt{n^2+10n+k}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(22)=\mathbf{5}$

b) $G(28)=\boldsymbol{\sqrt{39}-1}$

c) $G(24)=\mathbf{5}$

d) $G(26)=\boldsymbol{\sqrt{37}-1}$

2. Niech $G(k)=\sup\left\{\dfrac{1}{n^2-100n+k}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(2560)=\mathbf{1/60}$

b) $G(2430)=\mathbf{1/11}$

c) $G(2530)=\mathbf{1/30}$

d) $G(2460)=\mathbf{1/9}$

3. Niech $G(a,b)=\sup\left\{\dfrac{mn}{am^2+bn^2}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(81,100)=\mathbf{1/180}$

b) $G(16,25)=\mathbf{1/40}$

c) $G(25,36)=\mathbf{1/60}$

d) $G(9,16)=\mathbf{1/24}$

4. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1}+\frac{2n+2}{n^2+2n+2}+\ldots+\frac{2n+k}{n^2+2n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{48}$

b) $G(8)=\mathbf{30}$

c) $G(4)=\mathbf{6}$

d) $G(6)=\mathbf{16}$

Kolokwium 5 Wersja testu **D** 18 grudnia 2024 r.

5. Niech $S(k,m)=\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(1,63)=\mathbf{3}$

b) $S(5,4999)=\mathbf{9\sqrt[3]{5}}$

c) $S(1,26)=\mathbf{2}$

d) $S(3,80)=\mathbf{2\sqrt[3]{3}}$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $13,16\in A$ **56**

b) $10,13\in A$ **35**

c) $12,15\in A$ **48**

d) $11,14\in A$ **42**

7. Niech $f_n(x)=\sqrt{nx+1}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_6'(4)=\mathbf{3/5}$

b) $f_{12}'(2)=\mathbf{6/5}$

c) $f_8'(3)=\mathbf{4/5}$

d) $f_{24}'(1)=\mathbf{12/5}$

8. Podaj wartość pochodnej funkcji f określonej danym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt[3]{31x^2+1}$ $f'(2)=\mathbf{124/75}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{120x^2+5}$ $f'(1)=\mathbf{16/5}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$ $f'(11)=\mathbf{22/75}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{30x^2+5}$ $f'(2)=\mathbf{8/5}$

9. Niech $f_n(x) = x \cdot \sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_2'(4) = \mathbf{3}$

b) $f_5'(32) = \mathbf{12/5}$

c) $f_3'(8) = \mathbf{8/3}$

d) $f_4'(16) = \mathbf{5/2}$

10. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + 3)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_5'(2) = \mathbf{16/7}$

b) $f_2'(2) = \mathbf{4/7}$

c) $f_4'(2) = \mathbf{32/19}$

d) $f_3'(2) = \mathbf{12/11}$

11. Niech

$$G(p) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^4+n+1} + \frac{4n+8}{n^4+4n+8} + \ldots + \frac{k^2n+k^3}{n^4+k^2n+k^3} + \ldots + \frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$

Wówczas

a) $G(80) = \mathbf{256/3}$

b) $G(12) = \mathbf{20/3}$

c) $G(36) = \mathbf{117/4}$

d) $G(2) = \mathbf{7/12}$

12. Niech $f_n(x) = g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x) = \left(\sqrt[3]{x} + 1\right)^3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_6'(125) = \mathbf{121/25}$

b) $f_{16}'(64) = \mathbf{25}$

c) $f_8'(8) = \mathbf{25}$

d) $f_{27}'(27) = \mathbf{100}$

13. Niech $f_n(x) = g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x) = \ln(e^x + 7)$. Podaj wartość pochodnej w zerze.

a) $f_7'(0) = \mathbf{1/50}$

b) $f_3'(0) = \mathbf{1/22}$

c) $f_{10}'(0) = \mathbf{1/71}$

d) $f_{111}'(0) = \mathbf{1/778}$

ANALIZA 1 18 grudnia 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **E** 18 grudnia 2024 r.

1. Niech $G(k)=\sup\left\{\sqrt{n^2+10n+k}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(24)=\mathbf{5}$

b) $G(22)=\mathbf{5}$

c) $G(26)=\boldsymbol{\sqrt{37}-1}$

d) $G(28)=\boldsymbol{\sqrt{39}-1}$

2. Niech $G(k)=\sup\left\{\frac{1}{n^2-100n+k} : n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(2460)=\mathbf{1/9}$

b) $G(2530)=\mathbf{1/30}$

c) $G(2430)=\mathbf{1/11}$

d) $G(2560)=\mathbf{1/60}$

3. Niech $G(a,b)=\sup\left\{\frac{mn}{am^2+bn^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(25,36)=\mathbf{1/60}$

b) $G(16,25)=\mathbf{1/40}$

c) $G(81,100)=\mathbf{1/180}$

d) $G(9,16)=\mathbf{1/24}$

4. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1}+\frac{2n+2}{n^2+2n+2}+\ldots+\frac{2n+k}{n^2+2n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(6)=\mathbf{16}$

b) $G(8)=\mathbf{30}$

c) $G(10)=\mathbf{48}$

d) $G(4)=\mathbf{6}$

5. Niech $S(k,m)=\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(1,26)=\mathbf{2}$

b) $S(1,63)=\mathbf{3}$

c) $S(3,80)=\mathbf{2\sqrt[3]{3}}$

d) $S(5,4999)=\mathbf{9\sqrt[3]{5}}$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $11{,}14\in A$ **42**

b) $12{,}15\in A$ **48**

c) $10{,}13\in A$ **35**

d) $13{,}16\in A$ **56**

7. Niech $f_n(x)=\sqrt{nx+1}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_8'(3)=\mathbf{4/5}$

b) $f_{12}'(2)=\mathbf{6/5}$

c) $f_6'(4)=\mathbf{3/5}$

d) $f_{24}'(1)=\mathbf{12/5}$

8. Podaj wartość pochodnej funkcji f określonej danym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt[3]{30x^2+5}$ $f'(2)=\mathbf{8/5}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{120x^2+5}$ $f'(1)=\mathbf{16/5}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{31x^2+1}$ $f'(2)=\mathbf{124/75}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$ $f'(11)=\mathbf{22/75}$

9. Niech $f_n(x)=x\cdot\sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_3'(8)=\mathbf{8/3}$ b) $f_2'(4)=\mathbf{3}$

c) $f_4'(16)=\mathbf{5/2}$ d) $f_5'(32)=\mathbf{12/5}$

10. Niech $f_n(x)=\ln(x^n+3)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_3'(2)=\mathbf{12/11}$ b) $f_4'(2)=\mathbf{32/19}$

c) $f_2'(2)=\mathbf{4/7}$ d) $f_5'(2)=\mathbf{16/7}$

11. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^4+n+1}+\frac{4n+8}{n^4+4n+8}+\ldots+\frac{k^2n+k^3}{n^4+k^2n+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(36)=\mathbf{117/4}$ b) $G(12)=\mathbf{20/3}$

c) $G(80)=\mathbf{256/3}$ d) $G(2)=\mathbf{7/12}$

12. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_{27}'(27)=\mathbf{100}$ b) $f_{16}'(64)=\mathbf{25}$

c) $f_6'(125)=\mathbf{121/25}$ d) $f_8'(8)=\mathbf{25}$

13. Niech $f_n(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x)=\ln(e^x+7)$. Podaj wartość pochodnej w zerze.

a) $f_{10}'(0)=\mathbf{1/71}$ b) $f_{111}'(0)=\mathbf{1/778}$

c) $f_3'(0)=\mathbf{1/22}$ d) $f_7'(0)=\mathbf{1/50}$

ANALIZA 1 18 grudnia 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11, 12 i 13** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Niech $G(k)=\sup\left\{\sqrt{n^2+10n+k}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(26)=\boldsymbol{\sqrt{37}-1}$

b) $G(22)=\mathbf{5}$

c) $G(28)=\boldsymbol{\sqrt{39}-1}$

d) $G(24)=\mathbf{5}$

2. Niech $G(k)=\sup\left\{\dfrac{1}{n^2-100n+k}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(2430)=\mathbf{1/11}$

b) $G(2560)=\mathbf{1/60}$

c) $G(2460)=\mathbf{1/9}$

d) $G(2530)=\mathbf{1/30}$

3. Niech $G(a,b)=\sup\left\{\dfrac{mn}{am^2+bn^2}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Wtedy:

a) $G(25,36)=\mathbf{1/60}$

b) $G(9,16)=\mathbf{1/24}$

c) $G(16,25)=\mathbf{1/40}$

d) $G(81,100)=\mathbf{1/180}$

4. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1}+\frac{2n+2}{n^2+2n+2}+\ldots+\frac{2n+k}{n^2+2n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(8)=\mathbf{30}$

b) $G(10)=\mathbf{48}$

c) $G(6)=\mathbf{16}$

d) $G(4)=\mathbf{6}$

5. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(3,80)=\mathbf{2\sqrt[3]{3}}$

b) $S(1,63)=\mathbf{3}$

c) $S(5,4999)=\mathbf{9\sqrt[3]{5}}$

d) $S(1,26)=\mathbf{2}$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $10{,}13\in A$ **35**

b) $13{,}16\in A$ **56**

c) $11{,}14\in A$ **42**

d) $12{,}15\in A$ **48**

7. Niech $f_n(x)=\sqrt{nx+1}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_8'(3)=\mathbf{4/5}$

b) $f_{24}'(1)=\mathbf{12/5}$

c) $f_{12}'(2)=\mathbf{6/5}$

d) $f_6'(4)=\mathbf{3/5}$

8. Podaj wartość pochodnej funkcji f określonej danym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt[3]{120x^2+5}$ $f'(1)=\mathbf{16/5}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{31x^2+1}$ $f'(2)=\mathbf{124/75}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{30x^2+5}$ $f'(2)=\mathbf{8/5}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$ $f'(11)=\mathbf{22/75}$

9. Niech $f_n(x) = x \cdot \sqrt[n]{x}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_4'(16) = \mathbf{5/2}$ b) $f_2'(4) = \mathbf{3}$

c) $f_5'(32) = \mathbf{12/5}$ d) $f_3'(8) = \mathbf{8/3}$

10. Niech $f_n(x) = \ln(x^n + 3)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_2'(2) = \mathbf{4/7}$ b) $f_5'(2) = \mathbf{16/7}$

c) $f_3'(2) = \mathbf{12/11}$ d) $f_4'(2) = \mathbf{32/19}$

11. Niech

$$G(p) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^4+n+1} + \frac{4n+8}{n^4+4n+8} + \ldots + \frac{k^2n+k^3}{n^4+k^2n+k^3} + \ldots + \frac{pn^3}{n^4+pn^3} \right).$$

Wówczas

a) $G(36) = \mathbf{117/4}$ b) $G(2) = \mathbf{7/12}$

c) $G(12) = \mathbf{20/3}$ d) $G(80) = \mathbf{256/3}$

12. Niech $f_n(x) = g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x) = \left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f_{16}'(64) = \mathbf{25}$ b) $f_6'(125) = \mathbf{121/25}$

c) $f_{27}'(27) = \mathbf{100}$ d) $f_8'(8) = \mathbf{25}$

13. Niech $f_n(x) = g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$ będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji g, gdzie $g(x) = \ln(e^x + 7)$. Podaj wartość pochodnej w zerze.

a) $f_7'(0) = \mathbf{1/50}$ b) $f_{10}'(0) = \mathbf{1/71}$

c) $f_{111}'(0) = \mathbf{1/778}$ d) $f_3'(0) = \mathbf{1/22}$