ANALIZA 1, KOLOKWIUM nr 4, 4.12.2024, godz. 8:30–10:00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **9. (10 punktów)**

Oblicz granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n^3}}{(n+1)^3}+\frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{(n+1)^3+1}+\frac{\sqrt[3]{n^3+4}}{(n+1)^3+2}+\frac{\sqrt[3]{n^3+6}}{(n+1)^3+3}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n^3+2k}}{(n+1)^3+k}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3-6}}{(n+B)^3+C-3}+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3-4}}{(n+B)^3+C-2}+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3-2}}{(n+B)^3+C-1}+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3}}{(n+B)^3+C}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$, $B>1$ i C, aby zadanie miało sens.

Zadanie **10. (10 punktów)**

Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{(-2025)^n}{n!}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Zadanie **11. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{10x^2+1}\,.$$

a) (6 punktów) Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x,y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{10}\cdot|x-y|\,.$$

b) (4 punkty) Dla odpowiednio dobranych liczb rzeczywistych x,y udowodnij nierówność

$$|f(x)-f(y)|>3\cdot|x-y|\,.$$

Zadanie **12. (10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranej wartości rzeczywistej parametru a udowodnij, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{2024x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Noworoczna wskazówka rachunkowa: $\sqrt{2025}=20+25$.