## KOLOKWIUM nr 4, 4.12.2024, godz. 8:30–10:00

*Zadanie* **9. (10 punktów)**

Oblicz granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n^3}}{(n+1)^3}+\frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{(n+1)^3+1}+\frac{\sqrt[3]{n^3+4}}{(n+1)^3+2}+\frac{\sqrt[3]{n^3+6}}{(n+1)^3+3}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n^3+2k}}{(n+1)^3+k}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3-6}}{(n+B)^3+C-3}+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3-4}}{(n+B)^3+C-2}+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3-2}}{(n+B)^3+C-1}+\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3}}{(n+B)^3+C}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$, $B>1$ i $C$, aby zadanie miało sens.

*Rozwiązanie:*

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt[3]{(n+A)^3}}{(n+B)^3+C}=\frac{\sqrt[3]{n^3+3An+3A^2n+A^3}}{n^3+3Bn^2+3B^2n+B^3+C}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{n^3+2\cdot\frac{3An^2+3A^2n+A^3}{2}}}{n^3+3n^2+3n+1+(3(B-1)n^2+3\,(B^2-1)\,n+B^3+C-1)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt[3]{n^3+2k}}{(n+1)^3+k}\,, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{3An^2+3A^2n+A^3}{2}=3(B-1)n^2+3\left(B^2-1\right)n+B^3+C-1\,, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego $n$ obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich $A$, $B$ i $C$, aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej $n$, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$3An^2+3A^2n+A^3=2\cdot\left(3(B-1)n^2+3\left(B^2-1\right)n+B^3+C-1\right)\,,$$
$$3An^2+3A^2n+A^3=6(B-1)n^2+6(B-1)(B+1)n+2B^3+2C-2\,. \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej $n$, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases}3A&=&6(B-1)\\3A^2&=&6(B-1)(B+1)\\A^3&=&2B^3+2C-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}A&=&2(B-1)\\A^2&=&2(B-1)(B+1)\\A^3&=&2B^3+2C-2\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze[1] otrzymujemy $A=B+1$, co po podstawieniu do pierwszego równania daje

$$B+1=2B-2\,,$$

skąd $B=3$ i $A=4$. Trzecie równanie przybiera postać

$$64=52+2C\,,$$

co prowadzi do $C=6$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=6n^2+24n+32\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $6n^2+24n+33$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$\left(6n^2+24n+33\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{n^3}}{(n+3)^3+6} \leqslant \sum_{k=0}^{6n^2+24n+32}\frac{\sqrt[3]{n^3+2k}}{(n+1)^3+k} \leqslant \left(6n^2+24n+33\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(n+4)^3}}{(n+1)^3}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$\left(6n^2+24n+33\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{n^3}}{(n+3)^3+6}=\frac{(6n^2+24n+33)\cdot n}{(n+3)^3+6}=\frac{6+\frac{24}{n}+\frac{33}{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^3+\frac{6}{n^3}}\to 6$$

oraz

$$\left(6n^2+24n+33\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(n+4)^3}}{(n+1)^3}=\frac{(6n^2+24n+33)\cdot(n+4)}{(n+1)^3}=\frac{\left(6+\frac{24}{n}+\frac{33}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\to 6\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

**Odpowiedź:** Zadanie ma sens dla $A=4$, $B=3$, $C=6$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 6.

[1] Dokładniej: Zastępując w układzie równań drugie równanie ilorazem drugiego równania przez pierwsze. Zgodnie z założeniami o $A$ i $B$ podanymi w treści zadania liczby po obu stronach pierwszego równania są dodatnie, a więc niezerowe.

*Zadanie* **10.** **(10 punktów)**
Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{(-2025)^n}{n!} : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

*Rozwiązanie:*
Szukając kresów zbioru wyrazów ciągu, powinniśmy zbadać jego monotoniczność[2]. Ponieważ w tym wypadku mamy do czynienia z ciągiem naprzemiennym[3], nie ma mowy o choćby częściowej monotoniczności samego ciagu. Dlatego zbadamy monotoniczność ciągu wartości bezwzględnych.

Oznaczając
$$a_n=\frac{(-2025)^n}{n!}$$
otrzymujemy
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{2025^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2025^n}=\frac{2025}{n+1}\begin{cases} >1 & \text{dla} \quad n\leqslant 2023\\ =1 & \text{dla} \quad n=2024\\ <1 & \text{dla} \quad n\geqslant 2025\end{cases}$$

Stąd wynika, że ciąg $(|a_n|)$ jest rosnący do wyrazu 2024-tego, wyrazy 2024-ty i 2025-ty są równe, a dalej ciąg maleje. Stąd wynika, że wyrazy $|a_{2024}|$ i $|a_{2025}|$ są największymi wyrazami ciągu $(|a_n|)$, a w konsekwencji wyrazy $a_{2024}$ i $a_{2025}$ są w danym w zadaniu zbiorze elementami o największej wartości bezwzględnej. Ponieważ jednocześnie elementy te mają różne znaki, to są one kresami tego zbioru.

**Odpowiedź:**
Kres dolny danego zbioru jest równy $-\dfrac{2025^{2025}}{2025!}=-\dfrac{2025^{2024}}{2024!}$, a kres górny $\dfrac{2025^{2024}}{2024!}$.

[2] A dokładniej, nie chodzi nam koniecznie o monotoniczność całego ciągu od pierwszego wyrazu do nieskończoności, a zadowolą nas częściowe konkluzje w stylu: *Ciąg jest rosnący/malejący od wyrazu takiego do siakiego.* Liczymy na to, że pozwolą one porównać wyrazy ciągu i wyznaczyć kresy zbioru jego wyrazów.

[3] Czyli takim, w którym na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

*Zadanie* **11. (10 punktów)**
Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{10x^2+1}\,.$$

**a) (6 punktów)** Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{10}\cdot|x-y|\ .$$

*Rozwiązanie:*
Skorzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając w międzyczasie z nierówności trójkąta $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ :

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{10x^2+1}-\sqrt{10y^2+1}\right|=\left|\frac{(10x^2+1)-(10y^2+1)}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}\right|=$$

$$=\frac{10\cdot|x^2-y^2|}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}=\frac{10\cdot|x-y|\cdot|x+y|}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}\leqslant\frac{10\cdot|x-y|\cdot(|x|+|y|)}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{10}\cdot|x-y|\cdot\left(\sqrt{10x^2}+\sqrt{10y^2}\right)}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}\leqslant\frac{\sqrt{10}\cdot|x-y|\cdot\left(\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}\right)}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}=\sqrt{10}\cdot|x-y|\,,$$

co kończy dowód podanej w zadaniu nierówności.

**b) (4 punkty)** Dla odpowiednio dobranych liczb rzeczywistych $x$, $y$ udowodnij nierówność

$$|f(x)-f(y)|>3\cdot|x-y|\ .$$

*Rozwiązanie:*
Wykorzystując przekształcenia z części **a)** otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot\frac{10\cdot|x+y|}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}\,.$$

Zatem dla rozwiązania drugiej części zadania wystarczy wskazać takie liczby $x\neq y$, że

$$\frac{10\cdot|x+y|}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}>3$$

lub po prostu

$$\frac{10x+10y}{\sqrt{10x^2+1}+\sqrt{10y^2+1}}>3\,,$$

jeśli wybierzemy nieujemne liczby $x$ i $y$. Ostatnia nierówność jest równoważna nierówności

$$10x+10y>\sqrt{90x^2+9}+\sqrt{90y^2+9}\,,$$

co jest prawdą jeżeli

$$10x>\sqrt{90x^2+9}\qquad\text{oraz}\qquad 10y>\sqrt{90y^2+9}\,.$$

Lewa z powyższych[4] nierówności jest, po obustronnym podnienieniu do kwadratu, równoważna[5] nierówności

$$100x^2 > 90x^2 + 9\,,$$

czyli

$$10x^2 > 9\,,$$

a to jest spełnione przez każdą[6] liczbę $x \geqslant 1$. Analogicznie, nierówność $10y > \sqrt{90y^2+9}$ jest spełniona dla liczb $y \geqslant 1$.

Wystarczy więc wskazać dwie różne liczby $x$ i $y$ nie mniejsze od 1, np. $x=1$ i $y=2$.

[4]Nie śmiem naruszać tradycji, która nakazuje w górnej linijce strony używać słowa *powyższy* jako odniesienia do dolnej linijki strony poprzedniej.

[5]Pamiętajmy, że zdecydowaliśmy się na wybór nieujemnych liczb $x$ i $y$.

[6]Przez niektóre nieco mniejsze od 1 też, bo wystarczy $x > \sqrt{\frac{9}{10}}$, ale naszym celem nie jest rozwiązywanie nierówności, a jedynie wskazanie liczby, która ją spoełnia.

*Zadanie* **12.** **(10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranej wartości rzeczywistej parametru $a$ udowodnij, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{2024x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

*Noworoczna wskazówka rachunkowa:* $\sqrt{2025}=20+25$.

*Rozwiązanie:*

Ponieważ $f(0)=1$ oraz $f(1)=a+\sqrt{2025}=a+45$, funkcja $f$ ma szansę być odwrotną do samej siebie tylko wtedy, gdy

$$0=f(f(0))=a+45\,,$$

czyli tylko dla $a=-45$.

Wykażemy, że funkcja $f$ określona wzorem

$$f(x)=-45x+\sqrt{2024x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Wykres funkcji $f$ jest krzywą[7] o równaniu

$$y=-45x+\sqrt{2024x^2+1}\,,$$

czyli

$$y+45x=\sqrt{2024x^2+1}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Z powyższego równania wynika[8]

$$y+x=\sqrt{2024x^2+1}-44x\geqslant\sqrt{2024x^2+1}-44|x|>\sqrt{2024x^2}-44|x|=$$
$$=\sqrt{2024}|x|-44|x|=\left(\sqrt{2024}-44\right)\cdot|x|>0\,,$$

natomiast z podobnego równania

$$y+45x=-\sqrt{2024x^2+1} \qquad (\diamondsuit)$$

dochodzimy do

$$y+x=-\sqrt{2024x^2+1}-44x\leqslant-\sqrt{2024x^2+1}+44|x|<-\sqrt{2024x^2}+44|x|=$$
$$=-\sqrt{2024}|x|+44|x|=-\left(\sqrt{2024}-44\right)\cdot|x|<0\,.$$

Podsumujmy:

$$y+45x=\sqrt{2024x^2+1} \quad\Rightarrow\quad x+y>0$$

oraz

$$y+45x=-\sqrt{2024x^2+1} \quad\Rightarrow\quad x+y<0\,,$$

[7] Z uzyskanej w dalszej części rozwiązania postaci równania tej krzywej można stwierdzić, że krzywa ta jest hiperbolą. A dokładniej jest jedną gałęzią hiperboli, podczas gdy druga gałąź jest opisywana przez równanie $(\diamondsuit)$.

[8] Korzystamy tu z nierówności $44^2=(45-1)^2=45^2-90+1=2025-89<2024$, która daje $\sqrt{2024}-44>0$.

a więc w równaniu

$$y+45x=\pm\sqrt{2024x^2+1}$$

znak "$\pm$" jest taki sam jak znak liczby $x+y$.

Idea powyższych oszacowań jest następująca: W wyrażeniu

$$\pm\sqrt{2024x^2+1}-44x\,,$$

które jest równe sumie $x+y$, pierwszy składnik ma większą wartość bezwzględną niż drugi, a więc znak całego wyrażenia (czyli znak $x+y$) będzie taki sam jak znak pierwszego składnika, czyli jak znak "$\pm$".

Zatem równanie ($\heartsuit$) wykresu funkcji $f$ można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$, gdyż nierówność ta wymusza, aby pierwiastek był ze znakiem plus, a nie minus.

Otrzymujemy kolejno

$$y^2+90xy+2025x^2=2024x^2+1, \qquad x+y>0$$

$$y^2+90xy+x^2=1, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania $x$ oraz $y$ w powyższym warunku, wykres funkcji $f$ jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$, co oznacza, że funkcja $f$ jest funkcją odwrotną do samej siebie.

**Odpowiedź:** Wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-45$.