ANALIZA 1 13 listopada 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11 i 12** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 3 Wersja testu **A** 13 listopada 2024 r.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x>1$, że $\log_x(n-x)=-1$.

a) $n=4$, $x=$ .... b) $n=6$, $x=$ ....

c) $n=8$, $x=$ .... d) $n=12$, $x=$ ....

2. Zapisz podany zbiór w postaci przekroju zbioru liczb wymiernych z odpowiednim przedziałem. Przypomnienie: $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$

a) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^n \leqslant 32^m \leqslant 128^n\right\}=\mathbb{Q}\cap$ ....

b) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^n \leqslant 27^m \leqslant 81^n\right\}=\mathbb{Q}\cap$ ....

c) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3 \leqslant 27m^3 \leqslant 125n^3\right\}=\mathbb{Q}\cap$ ....

d) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9n^2 \leqslant 64m^2 \leqslant 81n^2\right\}=\mathbb{Q}\cap$ ....

3. Zapisz podany zbiór w postaci przedziału.

a) $\left\{x^2 : x\in(-4,2)\right\}=$ .... b) $\left\{x^2 : x\in(-7,-1)\right\}=$ ....

c) $\left\{x^2 : x\in(2,8)\right\}=$ .... d) $\left\{x^2 : x\in(-1,5)\right\}=$ ....

4. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^2}$.

a) $k=70$, $n=$ .... b) $k=4$, $n=$ ....

c) $k=5$, $n=$ .... d) $k=9$, $n=$ ....

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,(n\in A \Rightarrow (n+2)\in A)$ oraz

a) $5{,}6\in A$ ....

b) $6{,}7\in A$ ....

c) $7{,}8\in A$ ....

d) $8{,}9\in A$ ....

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,(n\in A \Rightarrow (n+3)\in A)$ oraz

a) $7{,}8{,}9\in A$ ....

b) $6{,}7{,}8\in A$ ....

c) $5{,}6{,}7\in A$ ....

d) $4{,}5{,}6\in A$ ....

7. Niech $G(k,m)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^k}-\sqrt{n^4+n^m}\right)$. Wtedy:

a) $G(1,2)=$ ....

b) $G(2,2)=$ ....

c) $G(1,1)=$ ....

d) $G(2,1)=$ ....

8. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(5,79)=$ ....

b) $S(1,15)=$ ....

c) $S(1,80)=$ ....

d) $S(4,63)=$ ....

9. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^5+n^3+1}+\frac{n^3+2}{n^5+n^3+2}+\ldots+\frac{n^3+k}{n^5+n^3+k}+\ldots+\frac{(n+p)^3}{n^5+(n+p)^3}\right).$$

Wówczas

a) $G(1)=$ ....

b) $G(5)=$ ....

c) $G(10)=$ ....

d) $G(222)=$ ....

10. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n+k}{n^2+n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(9)=$ ....

b) $G(7)=$ ....

c) $G(5)=$ ....

d) $G(3)=$ ....

11. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}+\frac{2n+4}{n^3+2n+4}+\ldots+\frac{kn+k^2}{n^3+kn+k^2}+\ldots+\frac{pn^2}{n^3+pn^2}\right).$$

Wówczas

a) $G(6)=$ ....

b) $G(2)=$ ....

c) $G(42)=$ ....

d) $G(12)=$ ....

12. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}+\frac{2n^2+8}{n^4+2n^2+8}+\ldots+\frac{kn^2+k^3}{n^4+kn^2+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$

Wówczas

a) $G(68)=$ ....

b) $G(2)=$ ....

c) $G(10)=$ ....

d) $G(30)=$ ....