ANALIZA 1 13 listopada 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11 i 12** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 3 Wersja testu **A** 13 listopada 2024 r.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x>1$, że $\log_x(n-x)=-1$.

a) $n=4, \quad x=\mathbf{2+\sqrt{3}}$

b) $n=6, \quad x=\mathbf{3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}}$

c) $n=8, \quad x=\mathbf{4+\sqrt{15}}$

d) $n=12, \quad x=\mathbf{6+\sqrt{35}}$

2. Zapisz podany zbiór w postaci przekroju zbioru liczb wymiernych z odpowiednim przedziałem. Przypomnienie: $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$

a) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^n \leqslant 32^m \leqslant 128^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/5, 7/5}]$

b) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^n \leqslant 27^m \leqslant 81^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3, 4/3}]$

c) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3 \leqslant 27m^3 \leqslant 125n^3\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3, 5/3}]$

d) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9n^2 \leqslant 64m^2 \leqslant 81n^2\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/8, 9/8}]$

3. Zapisz podany zbiór w postaci przedziału.

a) $\left\{x^2 : x\in(-4,2)\right\}=[\mathbf{0, 16})$

b) $\left\{x^2 : x\in(-7,-1)\right\}=(\mathbf{1, 49})$

c) $\left\{x^2 : x\in(2,8)\right\}=(\mathbf{4, 64})$

d) $\left\{x^2 : x\in(-1,5)\right\}=[\mathbf{0, 25})$

4. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^2}$.

a) $k=70, \quad n=\mathbf{4970}$

b) $k=4, \quad n=\mathbf{20}$

c) $k=5, \quad n=\mathbf{30}$

d) $k=9, \quad n=\mathbf{90}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $5,6\in A$ **9**

b) $6,7\in A$ **12**

c) $7,8\in A$ **16**

d) $8,9\in A$ **20**

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A)$ oraz

a) $7,8,9\in A$ **27**

b) $6,7,8\in A$ **18**

c) $5,6,7\in A$ **12**

d) $4,5,6\in A$ **8**

7. Niech $G(k,m)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^k}-\sqrt{n^4+n^m}\right)$. Wtedy:

a) $G(1,2)=\mathbf{-1/2}$

b) $G(2,2)=\mathbf{3/2}$

c) $G(1,1)=\mathbf{0}$

d) $G(2,1)=\mathbf{2}$

8. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(5,79)=\boldsymbol{\sqrt[4]{5}}$

b) $S(1,15)=\mathbf{1}$

c) $S(1,80)=\mathbf{2}$

d) $S(4,63)=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

9. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^5+n^3+1}+\frac{n^3+2}{n^5+n^3+2}+\ldots+\frac{n^3+k}{n^5+n^3+k}+\ldots+\frac{(n+p)^3}{n^5+(n+p)^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(1)=\mathbf{3}$

b) $G(5)=\mathbf{15}$

c) $G(10)=\mathbf{30}$

d) $G(222)=\mathbf{666}$

10. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n+k}{n^2+n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$
Wówczas

a) $G(9)=\mathbf{40}$

b) $G(7)=\mathbf{24}$

c) $G(5)=\mathbf{12}$

d) $G(3)=\mathbf{4}$

11. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}+\frac{2n+4}{n^3+2n+4}+\ldots+\frac{kn+k^2}{n^3+kn+k^2}+\ldots+\frac{pn^2}{n^3+pn^2}\right).$$
Wówczas

a) $G(6)=\mathbf{14/3}$

b) $G(2)=\mathbf{5/6}$

c) $G(42)=\mathbf{90}$

d) $G(12)=\mathbf{27/2}$

12. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}+\frac{2n^2+8}{n^4+2n^2+8}+\ldots+\frac{kn^2+k^3}{n^4+kn^2+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(68)=\mathbf{72}$

b) $G(2)=\mathbf{3/4}$

c) $G(10)=\mathbf{6}$

d) $G(30)=\mathbf{99/4}$

ANALIZA 1 13 listopada 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11 i 12** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 3 Wersja testu **B** 13 listopada 2024 r.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x>1$, że $\log_x(n-x)=-1$.

a) $n=8, \quad x=\mathbf{4+\sqrt{15}}$

b) $n=6, \quad x=\mathbf{3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}}$

c) $n=4, \quad x=\mathbf{2+\sqrt{3}}$

d) $n=12, \quad x=\mathbf{6+\sqrt{35}}$

2. Zapisz podany zbiór w postaci przekroju zbioru liczb wymiernych z odpowiednim przedziałem. Przypomnienie: $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$

a) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9n^2 \leqslant 64m^2 \leqslant 81n^2\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/8, 9/8}]$

b) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3 \leqslant 27m^3 \leqslant 125n^3\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3, 5/3}]$

c) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^n \leqslant 32^m \leqslant 128^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/5, 7/5}]$

d) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^n \leqslant 27^m \leqslant 81^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3, 4/3}]$

3. Zapisz podany zbiór w postaci przedziału.

a) $\left\{x^2 : x\in(2,8)\right\}=(\mathbf{4, 64})$

b) $\left\{x^2 : x\in(-4,2)\right\}=[\mathbf{0, 16})$

c) $\left\{x^2 : x\in(-7,-1)\right\}=(\mathbf{1, 49})$

d) $\left\{x^2 : x\in(-1,5)\right\}=[\mathbf{0, 25})$

4. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^2}$.

a) $k=70, \quad n=\mathbf{4970}$

b) $k=9, \quad n=\mathbf{90}$

c) $k=5, \quad n=\mathbf{30}$

d) $k=4, \quad n=\mathbf{20}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $7{,}8\in A$ **16**

b) $6{,}7\in A$ **12**

c) $5{,}6\in A$ **9**

d) $8{,}9\in A$ **20**

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A)$ oraz

a) $4{,}5{,}6\in A$ **8**

b) $5{,}6{,}7\in A$ **12**

c) $7{,}8{,}9\in A$ **27**

d) $6{,}7{,}8\in A$ **18**

7. Niech $G(k,m)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^k}-\sqrt{n^4+n^m}\right)$. Wtedy:

a) $G(1,1)=\mathbf{0}$

b) $G(1,2)=\mathbf{-1/2}$

c) $G(2,2)=\mathbf{3/2}$

d) $G(2,1)=\mathbf{2}$

8. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(5,79)=\boldsymbol{\sqrt[4]{5}}$

b) $S(4,63)=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

c) $S(1,80)=\mathbf{2}$

d) $S(1,15)=\mathbf{1}$

9. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^5+n^3+1}+\frac{n^3+2}{n^5+n^3+2}+\ldots+\frac{n^3+k}{n^5+n^3+k}+\ldots+\frac{(n+p)^3}{n^5+(n+p)^3}\right).$$

Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{30}$

b) $G(5)=\mathbf{15}$

c) $G(1)=\mathbf{3}$

d) $G(222)=\mathbf{666}$

10. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n+k}{n^2+n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(3)=\mathbf{4}$

b) $G(5)=\mathbf{12}$

c) $G(9)=\mathbf{40}$

d) $G(7)=\mathbf{24}$

11. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}+\frac{2n+4}{n^3+2n+4}+\ldots+\frac{kn+k^2}{n^3+kn+k^2}+\ldots+\frac{pn^2}{n^3+pn^2}\right).$$

Wówczas

a) $G(42)=\mathbf{90}$

b) $G(6)=\mathbf{14/3}$

c) $G(2)=\mathbf{5/6}$

d) $G(12)=\mathbf{27/2}$

12. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}+\frac{2n^2+8}{n^4+2n^2+8}+\ldots+\frac{kn^2+k^3}{n^4+kn^2+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$

Wówczas

a) $G(68)=\mathbf{72}$

b) $G(30)=\mathbf{99/4}$

c) $G(10)=\mathbf{6}$

d) $G(2)=\mathbf{3/4}$

ANALIZA 1 13 listopada 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11 i 12** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 3 Wersja testu **C** 13 listopada 2024 r.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x>1$, że $\log_x(n-x)=-1$.

a) $n=8,\quad x=\mathbf{4+\sqrt{15}}$

b) $n=4,\quad x=\mathbf{2+\sqrt{3}}$

c) $n=12,\quad x=\mathbf{6+\sqrt{35}}$

d) $n=6,\quad x=\mathbf{3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}}$

2. Zapisz podany zbiór w postaci przekroju zbioru liczb wymiernych z odpowiednim przedziałem. Przypomnienie: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

a) $\left\{\frac{m}{n}\ :\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8^n\leqslant 32^m\leqslant 128^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/5,\ 7/5}]$

b) $\left\{\frac{m}{n}\ :\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 8n^3\leqslant 27m^3\leqslant 125n^3\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3,\ 5/3}]$

c) $\left\{\frac{m}{n}\ :\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9n^2\leqslant 64m^2\leqslant 81n^2\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/8,\ 9/8}]$

d) $\left\{\frac{m}{n}\ :\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9^n\leqslant 27^m\leqslant 81^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3,\ 4/3}]$

3. Zapisz podany zbiór w postaci przedziału.

a) $\left\{x^2\ :\ x\in(-7,-1)\right\}=(\mathbf{1,\ 49})$

b) $\left\{x^2\ :\ x\in(-4,2)\right\}=[\mathbf{0,\ 16})$

c) $\left\{x^2\ :\ x\in(2,8)\right\}=(\mathbf{4,\ 64})$

d) $\left\{x^2\ :\ x\in(-1,5)\right\}=[\mathbf{0,\ 25})$

4. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^2}$.

a) $k=70,\quad n=\mathbf{4970}$

b) $k=5,\quad n=\mathbf{30}$

c) $k=9,\quad n=\mathbf{90}$

d) $k=4,\quad n=\mathbf{20}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $7{,}8\in A$ **16**

b) $5{,}6\in A$ **9**

c) $8{,}9\in A$ **20**

d) $6{,}7\in A$ **12**

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A)$ oraz

a) $7{,}8{,}9\in A$ **27**

b) $5{,}6{,}7\in A$ **12**

c) $4{,}5{,}6\in A$ **8**

d) $6{,}7{,}8\in A$ **18**

7. Niech $G(k,m)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^k}-\sqrt{n^4+n^m}\right)$. Wtedy:

a) $G(2,2)=\mathbf{3/2}$

b) $G(1,2)=\mathbf{-1/2}$

c) $G(1,1)=\mathbf{0}$

d) $G(2,1)=\mathbf{2}$

8. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(5,79)=\boldsymbol{\sqrt[4]{5}}$

b) $S(1,80)=\mathbf{2}$

c) $S(4,63)=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

d) $S(1,15)=\mathbf{1}$

9. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^5+n^3+1}+\frac{n^3+2}{n^5+n^3+2}+\ldots+\frac{n^3+k}{n^5+n^3+k}+\ldots+\frac{(n+p)^3}{n^5+(n+p)^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{30}$ b) $G(1)=\mathbf{3}$

c) $G(222)=\mathbf{666}$ d) $G(5)=\mathbf{15}$

10. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n+k}{n^2+n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$
Wówczas

a) $G(9)=\mathbf{40}$ b) $G(5)=\mathbf{12}$

c) $G(3)=\mathbf{4}$ d) $G(7)=\mathbf{24}$

11. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}+\frac{2n+4}{n^3+2n+4}+\ldots+\frac{kn+k^2}{n^3+kn+k^2}+\ldots+\frac{pn^2}{n^3+pn^2}\right).$$
Wówczas

a) $G(2)=\mathbf{5/6}$ b) $G(6)=\mathbf{14/3}$

c) $G(42)=\mathbf{90}$ d) $G(12)=\mathbf{27/2}$

12. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}+\frac{2n^2+8}{n^4+2n^2+8}+\ldots+\frac{kn^2+k^3}{n^4+kn^2+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(68)=\mathbf{72}$ b) $G(10)=\mathbf{6}$

c) $G(30)=\mathbf{99/4}$ d) $G(2)=\mathbf{3/4}$

ANALIZA 1 13 listopada 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11 i 12** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 3 Wersja testu **D** 13 listopada 2024 r.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x>1$, że $\log_x(n-x)=-1$.

a) $n=4, \quad x=\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}$

b) $n=12, \quad x=\mathbf{6}+\sqrt{\mathbf{35}}$

c) $n=6, \quad x=\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{8}}=\mathbf{3}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$

d) $n=8, \quad x=\mathbf{4}+\sqrt{\mathbf{15}}$

2. Zapisz podany zbiór w postaci przekroju zbioru liczb wymiernych z odpowiednim przedziałem. Przypomnienie: $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$

a) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^n \leqslant 32^m \leqslant 128^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/5,\ 7/5}]$

b) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9n^2 \leqslant 64m^2 \leqslant 81n^2\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/8,\ 9/8}]$

c) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^n \leqslant 27^m \leqslant 81^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3,\ 4/3}]$

d) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3 \leqslant 27m^3 \leqslant 125n^3\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3,\ 5/3}]$

3. Zapisz podany zbiór w postaci przedziału.

a) $\left\{x^2 : x\in(2,8)\right\}=(\mathbf{4,\ 64})$

b) $\left\{x^2 : x\in(-4,2)\right\}=[\mathbf{0,\ 16})$

c) $\left\{x^2 : x\in(-1,5)\right\}=[\mathbf{0,\ 25})$

d) $\left\{x^2 : x\in(-7,-1)\right\}=(\mathbf{1,\ 49})$

4. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^2}$.

a) $k=70, \quad n=\mathbf{4970}$

b) $k=9, \quad n=\mathbf{90}$

c) $k=4, \quad n=\mathbf{20}$

d) $k=5, \quad n=\mathbf{30}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $5{,}6\in A$ **9**

b) $8{,}9\in A$ **20**

c) $6{,}7\in A$ **12**

d) $7{,}8\in A$ **16**

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A)$ oraz

a) $7{,}8{,}9\in A$ **27**

b) $4{,}5{,}6\in A$ **8**

c) $6{,}7{,}8\in A$ **18**

d) $5{,}6{,}7\in A$ **12**

7. Niech $G(k,m)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^k}-\sqrt{n^4+n^m}\right)$. Wtedy:

a) $G(1,1)=\mathbf{0}$

b) $G(1,2)=\mathbf{-1/2}$

c) $G(2,1)=\mathbf{2}$

d) $G(2,2)=\mathbf{3/2}$

8. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(5,79)=\boldsymbol{\sqrt[4]{5}}$

b) $S(4,63)=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

c) $S(1,15)=\mathbf{1}$

d) $S(1,80)=\mathbf{2}$

9. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^5+n^3+1}+\frac{n^3+2}{n^5+n^3+2}+\ldots+\frac{n^3+k}{n^5+n^3+k}+\ldots+\frac{(n+p)^3}{n^5+(n+p)^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(1)=\mathbf{3}$

b) $G(222)=\mathbf{666}$

c) $G(5)=\mathbf{15}$

d) $G(10)=\mathbf{30}$

10. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n+k}{n^2+n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$
Wówczas

a) $G(9)=\mathbf{40}$

b) $G(3)=\mathbf{4}$

c) $G(7)=\mathbf{24}$

d) $G(5)=\mathbf{12}$

11. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}+\frac{2n+4}{n^3+2n+4}+\ldots+\frac{kn+k^2}{n^3+kn+k^2}+\ldots+\frac{pn^2}{n^3+pn^2}\right).$$
Wówczas

a) $G(42)=\mathbf{90}$

b) $G(6)=\mathbf{14/3}$

c) $G(12)=\mathbf{27/2}$

d) $G(2)=\mathbf{5/6}$

12. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}+\frac{2n^2+8}{n^4+2n^2+8}+\ldots+\frac{kn^2+k^3}{n^4+kn^2+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(68)=\mathbf{72}$

b) $G(30)=\mathbf{99/4}$

c) $G(2)=\mathbf{3/4}$

d) $G(10)=\mathbf{6}$

ANALIZA 1 13 listopada 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11 i 12** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 3 Wersja testu **E** 13 listopada 2024 r.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x>1$, że $\log_x(n-x)=-1$.

a) $n=6$, $x=\mathbf{3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}}$

b) $n=4$, $x=\mathbf{2+\sqrt{3}}$

c) $n=8$, $x=\mathbf{4+\sqrt{15}}$

d) $n=12$, $x=\mathbf{6+\sqrt{35}}$

2. Zapisz podany zbiór w postaci przekroju zbioru liczb wymiernych z odpowiednim przedziałem. Przypomnienie: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

a) $\left\{\frac{m}{n}\,:\, m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 8n^3\leqslant 27m^3\leqslant 125n^3\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3,\ 5/3}]$

b) $\left\{\frac{m}{n}\,:\, m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 9^n\leqslant 27^m\leqslant 81^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3,\ 4/3}]$

c) $\left\{\frac{m}{n}\,:\, m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 9n^2\leqslant 64m^2\leqslant 81n^2\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/8,\ 9/8}]$

d) $\left\{\frac{m}{n}\,:\, m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 8^n\leqslant 32^m\leqslant 128^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/5,\ 7/5}]$

3. Zapisz podany zbiór w postaci przedziału.

a) $\left\{x^2\,:\, x\in(-1,5)\right\}=[\mathbf{0,\ 25})$

b) $\left\{x^2\,:\, x\in(-4,2)\right\}=[\mathbf{0,\ 16})$

c) $\left\{x^2\,:\, x\in(2,8)\right\}=(\mathbf{4,\ 64})$

d) $\left\{x^2\,:\, x\in(-7,-1)\right\}=(\mathbf{1,\ 49})$

4. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^2}$.

a) $k=5$, $n=\mathbf{30}$

b) $k=9$, $n=\mathbf{90}$

c) $k=70$, $n=\mathbf{4970}$

d) $k=4$, $n=\mathbf{20}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, (n\in A \Rightarrow (n+2)\in A)$ oraz

a) $6,7\in A$ **12**

b) $5,6\in A$ **9**

c) $7,8\in A$ **16**

d) $8,9\in A$ **20**

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, (n\in A \Rightarrow (n+3)\in A)$ oraz

a) $5,6,7\in A$ **12**

b) $6,7,8\in A$ **18**

c) $4,5,6\in A$ **8**

d) $7,8,9\in A$ **27**

7. Niech $G(k,m)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^k}-\sqrt{n^4+n^m}\right)$. Wtedy:

a) $G(2,1)=\mathbf{2}$

b) $G(1,2)=\mathbf{-1/2}$

c) $G(1,1)=\mathbf{0}$

d) $G(2,2)=\mathbf{3/2}$

8. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(1,80)=\mathbf{2}$

b) $S(4,63)=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

c) $S(5,79)=\boldsymbol{\sqrt[4]{5}}$

d) $S(1,15)=\mathbf{1}$

9. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^5+n^3+1}+\frac{n^3+2}{n^5+n^3+2}+\ldots+\frac{n^3+k}{n^5+n^3+k}+\ldots+\frac{(n+p)^3}{n^5+(n+p)^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(5)=\mathbf{15}$

b) $G(1)=\mathbf{3}$

c) $G(10)=\mathbf{30}$

d) $G(222)=\mathbf{666}$

10. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n+k}{n^2+n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$
Wówczas

a) $G(5)=\mathbf{12}$

b) $G(7)=\mathbf{24}$

c) $G(3)=\mathbf{4}$

d) $G(9)=\mathbf{40}$

11. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}+\frac{2n+4}{n^3+2n+4}+\ldots+\frac{kn+k^2}{n^3+kn+k^2}+\ldots+\frac{pn^2}{n^3+pn^2}\right).$$
Wówczas

a) $G(12)=\mathbf{27/2}$

b) $G(6)=\mathbf{14/3}$

c) $G(42)=\mathbf{90}$

d) $G(2)=\mathbf{5/6}$

12. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}+\frac{2n^2+8}{n^4+2n^2+8}+\ldots+\frac{kn^2+k^3}{n^4+kn^2+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{6}$

b) $G(30)=\mathbf{99/4}$

c) $G(68)=\mathbf{72}$

d) $G(2)=\mathbf{3/4}$

ANALIZA 1 13 listopada 2024 r., godz. 8:30–10:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania **11 i 12** to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x>1$, że $\log_x(n-x)=-1$.

a) $n=8$, $x=\mathbf{4}+\sqrt{\mathbf{15}}$

b) $n=4$, $x=\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}$

c) $n=12$, $x=\mathbf{6}+\sqrt{\mathbf{35}}$

d) $n=6$, $x=\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{8}}=\mathbf{3}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$

2. Zapisz podany zbiór w postaci przekroju zbioru liczb wymiernych z odpowiednim przedziałem. Przypomnienie: $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$

a) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9n^2\leqslant 64m^2\leqslant 81n^2\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/8, 9/8}]$

b) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^n\leqslant 32^m\leqslant 128^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{3/5, 7/5}]$

c) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3\leqslant 27m^3\leqslant 125n^3\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3, 5/3}]$

d) $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^n\leqslant 27^m\leqslant 81^n\right\}=\mathbb{Q}\cap[\mathbf{2/3, 4/3}]$

3. Zapisz podany zbiór w postaci przedziału.

a) $\left\{x^2 : x\in(-1,5)\right\}=[\mathbf{0, 25})$

b) $\left\{x^2 : x\in(-7,-1)\right\}=(\mathbf{1, 49})$

c) $\left\{x^2 : x\in(-4,2)\right\}=[\mathbf{0, 16})$

d) $\left\{x^2 : x\in(2,8)\right\}=(\mathbf{4, 64})$

4. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^2}$.

a) $k=9$, $n=\mathbf{90}$

b) $k=70$, $n=\mathbf{4970}$

c) $k=5$, $n=\mathbf{30}$

d) $k=4$, $n=\mathbf{20}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $7{,}8\in A$ **16**

b) $5{,}6\in A$ **9**

c) $8{,}9\in A$ **20**

d) $6{,}7\in A$ **12**

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(n\in A\Rightarrow(n+3)\in A)$ oraz

a) $4{,}5{,}6\in A$ **8**

b) $7{,}8{,}9\in A$ **27**

c) $5{,}6{,}7\in A$ **12**

d) $6{,}7{,}8\in A$ **18**

7. Niech $G(k,m)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^k}-\sqrt{n^4+n^m}\right)$. Wtedy:

a) $G(2,1)=\mathbf{2}$

b) $G(2,2)=\mathbf{3/2}$

c) $G(1,2)=\mathbf{-1/2}$

d) $G(1,1)=\mathbf{0}$

8. Niech $S(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)}$. Podaj w postaci uproszczonej:

a) $S(4,63)=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

b) $S(5,79)=\boldsymbol{\sqrt[4]{5}}$

c) $S(1,80)=\mathbf{2}$

d) $S(1,15)=\mathbf{1}$

9. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^5+n^3+1}+\frac{n^3+2}{n^5+n^3+2}+\ldots+\frac{n^3+k}{n^5+n^3+k}+\ldots+\frac{(n+p)^3}{n^5+(n+p)^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(10)=\mathbf{30}$

b) $G(1)=\mathbf{3}$

c) $G(222)=\mathbf{666}$

d) $G(5)=\mathbf{15}$

10. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n+k}{n^2+n+k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$
Wówczas

a) $G(3)=\mathbf{4}$

b) $G(9)=\mathbf{40}$

c) $G(5)=\mathbf{12}$

d) $G(7)=\mathbf{24}$

11. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}+\frac{2n+4}{n^3+2n+4}+\ldots+\frac{kn+k^2}{n^3+kn+k^2}+\ldots+\frac{pn^2}{n^3+pn^2}\right).$$
Wówczas

a) $G(12)=\mathbf{27/2}$

b) $G(2)=\mathbf{5/6}$

c) $G(6)=\mathbf{14/3}$

d) $G(42)=\mathbf{90}$

12. Niech
$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}+\frac{2n^2+8}{n^4+2n^2+8}+\ldots+\frac{kn^2+k^3}{n^4+kn^2+k^3}+\ldots+\frac{pn^3}{n^4+pn^3}\right).$$
Wówczas

a) $G(30)=\mathbf{99/4}$

b) $G(68)=\mathbf{72}$

c) $G(10)=\mathbf{6}$

d) $G(2)=\mathbf{3/4}$