

ANALIZA 1, KOŁOKWIUM nr **2**, **30.10.2024**, godz. 8:30–10:00

Wykład: J. Wróblewski

**PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW**

**Zadanie 5. (10 punktów)**

Podaj trzy przykłady liczb rzeczywistych dodatnich  $x \neq 1$ , dla których liczba

$$\log_x(x+100)$$

jest wymierna.

W podanych przykładach liczbę  $x$  należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania (dowolnego stopnia, ale wystarczająco pierwiastki kwadratowe).

W każdym z przykładów należy także podać wartość  $\log_x(x+100)$ .

**Zadanie 6. (10 punktów)**

Dane są ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  spełniające dla każdej liczby naturalnej  $n$  warunki

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad \text{oraz} \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n.$$

Udowodnij, że wówczas ciąg  $(c_n)$  określony wzorem

$$c_n = a_n^2 - 3b_n^2$$

jest ciągiem stałym.

**Zadanie 7. (10 punktów)**

Wskaż odpowiednią liczbę naturalną  $n$  i udowodnij dla niej nierówności

$$n2^{2^{63}} < 2^{2^n} < n2^{2^{64}}.$$

**Zadanie 8. (10 punktów)**

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{n^{24} + n^{11}} - n^3}{\left(\sqrt{n^{24} + n^{11}} - n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.