KOLOKWIUM nr 2, 30.10.2024, godz. 8:30–10:00

Zadanie **5. (10 punktów)**

Podaj trzy przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x (x+100)$$

jest wymierna.

W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania (dowolnego stopnia, ale wystarczą pierwiastki kwadratowe).

W każdym z przykładów należy także podać wartość $\log_x (x+100)$.

Rozwiązanie:

Przykład I:

Dla $x=25$ liczba

$$\log_x (x+100) = \log_{25} 125 = \frac{3}{2}$$

jest liczbą wymierną.

Przykład II:

Zakładając, że

$$\log_x (x+100) = w\,,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w = x+100\,. \tag{\#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2 = x+100\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[1] otrzymując

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{401}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1+\sqrt{401}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x (x+100) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

[1] Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

Przykład III:

Postępujemy jak w przykładzie II przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1}=x+100$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x=\sqrt{2501}-50\,.$$

Wówczas

$$\log_x(x+100)=\log_x x^{-1}=-1$$

jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=-1\,.$$

przyjmujemy $\sqrt{n}=\frac{100}{2}$, czyli $n=\left(\frac{100}{2}\right)^2=2500$, skąd otrzymujemy $x=\sqrt{2501}-50$.

Zadanie **6. (10 punktów)**

Dane są ciągi (a_n) i (b_n) spełniające dla każdej liczby naturalnej n warunki

$$a_{n+1}=2a_n+3b_n \qquad \text{oraz} \qquad b_{n+1}=a_n+2b_n\,.$$

Udowodnij, że wówczas ciąg (c_n) określony wzorem

$$c_n=a_n^2-3b_n^2$$

jest ciągiem stałym.

Rozwiązanie:

Wykorzystując zależności podane w treści zadania, dla dowolnej liczby naturalnej n otrzymujemy

$$c_{n+1}=a_{n+1}^2-3b_{n+1}^2=(2a_n+3b_n)^2-3\cdot(a_n+2b_n)^2=4a_n^2+12a_nb_n+9b_n^2-3a_n^2-12a_nb_n-12b_n^2=$$
$$=a_n^2-3b_n^2=c_n\,.$$

Skoro każde dwa kolejne wyrazy ciągu (c_n) są równe, to ciąg ten jest stały.

Zadanie **7. (10 punktów)**
Wskaż odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnij dla niej nierówności

$$n^{2^{2^{63}}} < 2^{2^n} < n^{2^{2^{64}}}.$$

Rozwiązanie:
Będziemy szukać liczb postaci $n=2^{2^k}$. Dla takich liczb podane w treści zadania nierówności przyjmują postać

$$\left(2^{2^k}\right)^{2^{2^{63}}} < 2^{2^{2^{2^k}}} < \left(2^{2^k}\right)^{2^{2^{64}}},$$

czyli

$$2^{2^{k+2^{63}}} < 2^{2^{2^{2^k}}} < 2^{2^{k+2^{64}}}.$$

Dwukrotne zlogarytmowanie podanych nierówności przy podstawie 2 prowadzi do nierówności równoważnych

$$k+2^{63} < 2^{2^k} < k+2^{64}.$$

Wystarczy zauważyć, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=6$, gdyż wówczas

$$6+2^{63} < 2^{63}+2^{63} = 2^{64} = 2^{2^6} < 6+2^{64}.$$

Odpowiedź:
Warunki zadania są spełnione dla liczby $n=2^{2^6}=2^{64}$.

Uwaga: Można też przyjąć $n=2^k$ i zauważyć, że prowadzi to do nierówności

$$k\cdot 2^{2^{63}} < 2^{2^k} < k\cdot 2^{2^{64}},$$

które są spełnione dla $k=64$.

Zadanie **8. (10 punktów)**

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[8]{n^{24}+n^{11}}-n^3}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując na poziomie mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a na poziomie licznika wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a^4+b^4)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a+b)}\,,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[8]{n^{24}+n^{11}}-n^3}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n^{11}}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}+n^{12}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}+n^{6}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{n^{24}+n^{11}}+n^{3}\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^{24}+n^{11}}+n^{12}}{n^{11}}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-10}}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[8]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-13}}+1}{n^{-1}}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^k}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[8]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot\frac{n^{-10}}{n^{-k}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^k}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[8]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot n^{k-10}=\frac{2^k}{2\cdot2\cdot2}=2^{k-3}\,,$$

o ile $k-10=0$, czyli $k=10$.

Odpowiedź:

Dana w zadaniu granica ma wartość 128 dla $k=10$.