KOLOKWIUM nr 1, 16.10.2024, godz. 8:30–10:00

Zadanie **1. (10 punktów)**

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{801}\cdot n\leqslant 2^n+25\cdot 2^{806}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 800$.

Dla $n\leqslant 800$ zachodzą nierówności

$$2^{801}\cdot n\leqslant 2^{801}\cdot 800=2^{801}\cdot 2^5\cdot 25=25\cdot 2^{806}<2^n+25\cdot 2^{806}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 801$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=801$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{801}\cdot 801\,,$$

$$P=2^{801}+25\cdot 2^{806}=2^{801}+25\cdot 2^5\cdot 2^{801}=2^{801}+800\cdot 2^{801}=801\cdot 2^{801}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 801$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{801}\cdot n\leqslant 2^n+25\cdot 2^{806}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{801}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+25\cdot 2^{806}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 801$ otrzymujemy

$$L=2^{801}\cdot(n+1)=2^{801}\cdot n+2^{801}\leqslant 2^n+25\cdot 2^{806}+2^{801}\leqslant 2^n+25\cdot 2^{806}+2^n=2^{n+1}+25\cdot 2^{806}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **2. (10 punktów)**
Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n}{n} \cdot \binom{2n}{n} \geqslant \frac{2 \cdot 3^{3n-2}}{n}.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $\binom{3n}{n} \cdot \binom{2n}{n} = 6$ oraz $\frac{2 \cdot 3^{3n-2}}{n} = 6$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $6 \geqslant 6$, jest więc prawdziwa.

Zanim przystąpimy do dalszej części rozwiązania, przepiszemy dowodzoną nierówność w prostszej postaci:

$$\frac{(3n)!}{(n!)^2 \cdot (n-1)!} \geqslant 2 \cdot 3^{3n-2}.$$

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{(3n)!}{(n!)^2 \cdot (n-1)!} \geqslant 2 \cdot 3^{3n-2}.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^2 \cdot n!} \geqslant 2 \cdot 3^{3n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$L = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^2 \cdot n!} = \frac{(3n)! \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n-1)! \cdot n} =$$

$$= \frac{(3n)!}{(n!)^2 \cdot (n-1)!} \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1)^2 \cdot n} \geqslant 2 \cdot 3^{3n-2} \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n+1) \cdot n} \geqslant$$

$$\geqslant 2 \cdot 3^{3n-2} \cdot 27 = 2 \cdot 3^{3n+1} = P,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n+1) \cdot n} \geqslant 27.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(3n+1) \cdot (3n+2) \geqslant 9n(n+1),$$

$$9n^2 + 9n + 2 \geqslant n^2 + 9n,$$

$$2 \geqslant 0,$$

a to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie **3. (10 punktów)**

Udowodnij, że liczba $\log_{(24/25)}\left(\frac{10}{9}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(24/25)}\left(\frac{10}{9}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(24/25)}\left(\frac{10}{9}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{24}{25}\right)^{-m/n}=\frac{10}{9}\,,$$

$$\left(\frac{24}{25}\right)^{-m}=\left(\frac{10}{9}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{25}{24}\right)^{m}=\left(\frac{10}{9}\right)^{n}\,,$$

$$25^m\cdot 9^n=10^n\cdot 24^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2n}\cdot 5^{2m}=2^{n+3m}\cdot 3^m\cdot 5^n\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0&=&n+3m\\ 2n&=&m\\ 2m&=&n \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=n<2n=m\,,$$

czyli $2m<m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(24/25)}\left(\frac{10}{9}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(24/25)}\left(\frac{10}{9}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych, lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne.

Zadanie **4. (10 punktów)**

Udowodnij istnienie takiej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, że liczba

$$\prod_{k=1}^{n} \log_{2k+1}(2k+5)$$

jest wymierna.

Rozwiązanie:

Dany w treści zadania iloczyn

$$\log_3 7 \cdot \log_5 9 \cdot \log_7 11 \cdot \log_9 13 \cdot \ldots \cdot \log_{2n-3}(2n+1) \cdot \log_{2n-1}(2n+3) \cdot \log_{2n+1}(2n+5)$$

upraszcza się do postaci

$$\log_3(2n+3) \cdot \log_5(2n+5) = \log_3(2n+5) \cdot \log_5(2n+3)\,,$$

gdzie korzystamy z równości

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

w celu dokonania uproszczeń oraz z równości

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$$

dla podania dwóch wariantów uproszczonego wyrażenia. Ta druga równość okazuje się mieć tylko walory redakcyjne i faktycznie nie jest konieczna w rozwiązaniu (ale o tym możemy przekonać się dopiero po przeanalizowaniu całego rozwiązania).

Zadanie będzie rozwiązane, jeśli daną w zadaniu liczbę przedstawimy w postaci iloczynu dwóch liczb wymiernych, co ma miejsce wtedy, gdy liczby $2n+3$ oraz $2n+5$ są, w dowolnej kolejności, potęgą trójki i potęgą piątki. Nietrudno wskazać, że takimi liczbami (różniącymi się o 2) są 25 i 27, skąd przyjmujemy $2n+3=25$ i $2n+5=27$, czyli $n=11$.

Wówczas

$$\prod_{k=1}^{11} \log_{2k+1}(2k+5) = \log_3 27 \cdot \log_5 25 = 3 \cdot 2 = 6\,.$$

Odpowiedź:

Podana liczba jest wymierna dla $n=11$ i ma wtedy wartość 6.