ANALIZA 2 10 września 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym z zadań za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{1}^{5} |x-22|+|x+28|\,dx = \ldots\ldots\ldots$ b) $\int\limits_{0}^{3} |x-22|+|x+28|\,dx = \ldots\ldots\ldots$

c) $\int\limits_{-1}^{6} |x-22|+|x+28|\,dx = \ldots\ldots\ldots$ d) $\int\limits_{2}^{4} |x-22|+|x+28|\,dx = \ldots\ldots\ldots$

2. Niech $C(k) = \int\limits_{-k}^{k} \sqrt[k]{x^k}\,dx$. Wówczas

a) $C(6) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $C(4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $C(3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $C(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{24x+1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{48x+1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{12x+1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{16x+1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{100}\cdot e^{x^{10}} .$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(500)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $f^{(200)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $f^{(300)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $f^{(400)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(2p-31)^n$, ...

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-41)^n}{\sqrt{n}}$, ...

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-51)^n}{n}$, ...

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-61)^n}{n^2}$, ...

6. Niech

$$C(a,b)=\int_a^b \frac{dx}{x^2+2x}\,.$$

Podaj w postaci $\mathbf{ln}\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$, gdzie $m,n\in\mathbb{N}$ oraz $\mathrm{NWD}(m,n)=1$.

a) $C(2,16)=\ln$ ....

b) $C(6,25)=\ln$ ....

c) $C(1,25)=\ln$ ....

d) $C(1,6)=\ln$ ....

7. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{64}-\sqrt[n+2]{64}\right)=$ ....

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{64}-\sqrt[n+1]{64}\right)=$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{25}-\sqrt[n+2]{25}\right)=$ ....

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{64}-\sqrt[n+3]{64}\right)=$ ....

8. Niech $C(k)=\int_0^{k\pi}\{\sin x\}\,dx$, gdzie $\{.\}$ oznacza część ułamkową. Wtedy

a) $C(4)=$ ....

b) $C(1)=$ ....

c) $C(2)=$ ....

d) $C(3)=$ ....

9. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg}(n)+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(n+10)$.

a) $n=1$, $w=$ ....

b) $n=2$, $w=$ ....

c) $n=3$, $w=$ ....

d) $n=4$, $w=$ ....

10. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{32}+x^{18}}}\,dx$, ...

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{29}+x^{16}}}\,dx$, ...

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{26}+x^{14}}}\,dx$, ...

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{3p}+x^{2p}}}{\sqrt{x^{23}+x^{12}}}\,dx$, ...

11. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{5n}\frac{k}{k^2+2n^2}=$ ....

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{k}{k^2+2n^2}=$ ....

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{8n}\frac{k}{k^2+2n^2}=$ ....

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{8n}\frac{k}{k^2+2n^2}=$ ....

12. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=80n+1}^{9999n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=$ ....

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=$ ....

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3n+1}^{8n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=$ ....

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{99n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=$ ....