Egzamin, 10.09.2024, godz. 9:00–11:00

Zadanie **1 (10 punktów)**

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[19]{x^9+1}\, dx$$

dla odpowiednio wybranej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=8}$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[19]{x^9+1}\,,$$

czyli

$$t^{19} = x^9+1$$

oraz formalnie

$$19t^{18}\, dt = 9x^8\, dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^8 \cdot \sqrt[19]{x^9+1}\, dx = \frac{1}{9}\int \sqrt[19]{x^9+1}\cdot 9x^8\, dx = \frac{1}{9}\int t\cdot 19t^{18}\, dt = \frac{19}{9}\int t^{19}\, dt = \frac{19}{9}\cdot\frac{t^{20}}{20} + C = \frac{19\cdot t^{20}}{180} + C =$$

$$= \mathbf{\frac{19}{180}\cdot\left(x^9+1\right)^{20/19} + C\,.}$$

Zadanie **2** **(10 punktów)**

Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pn)!\cdot x^n}{n!\cdot(3n)!\cdot n^n} \tag{1}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(pn+p)!\cdot x^{n+1}}{(n+1)!\cdot(3n+3)!\cdot(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot(3n)!\cdot n^n}{(pn)!\cdot x^n}\right|=$$

$$=\frac{(pn+1)\cdot(pn+2)\cdot\ldots\cdot(pn+p)\cdot|x|}{(n+1)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{(pn+1)\cdot(pn+2)\cdot\ldots\cdot(pn+p)}{(n+1)^2\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\cdot\frac{|x|}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\to$$

$$\to\lim_{n\to\infty}\frac{(pn+1)\cdot(pn+2)\cdot\ldots\cdot(pn+p)}{(n+1)^2\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\cdot\frac{|x|}{e}\,.$$

Ponieważ w mianowniku wyrażenia pod znakiem granicy znajduje się wielomian piątego stopnia, a w liczniku wielomian stopnia p, granica ta ma niezerową skończoną wartość tylko w przypadku równości tych stopni, czyli $p=5$, co daje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)\cdot(5n+2)\cdot(5n+3)\cdot(5n+4)\cdot(5n+5)}{(n+1)^2\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\cdot\frac{|x|}{e}=\frac{5^5\cdot|x|}{27e}\,.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{3125\cdot|x|}{27e}$ dla $p=5$.

Jeżeli $\frac{3125\cdot|x|}{27e}<1$, czyli $|x|<\frac{27e}{3125}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{3125\cdot|x|}{27e}>1$, czyli $|x|>\frac{27e}{3125}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{27e}{3125}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=5$ promień zbieżności $\frac{27e}{3125}$.

Zadanie **3 (10 punktów)**

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \left(x^6+1\right)\cdot \ln\left(x^6+7\right)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik (x^6+1) i różniczkując $\ln(x^6+7)$. Otrzymujemy:

$$\int \left(x^6+1\right)\cdot \ln\left(x^6+7\right)\,dx = \left(\frac{x^7}{7}+x\right)\cdot\ln\left(x^6+7\right) - \int\left(\frac{x^7}{7}+x\right)\cdot\frac{6x^5}{x^6+7}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^7}{7}+x\right)\cdot\ln\left(x^6+7\right) - \int\frac{x\cdot(x^6+7)}{7}\cdot\frac{6x^5}{x^6+7}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^7}{7}+x\right)\cdot\ln\left(x^6+7\right) - \frac{6}{7}\cdot\int x^6\,dx = \left(\frac{x^7}{7}+x\right)\cdot\ln\left(x^6+7\right) - \frac{6x^7}{49}+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int \left(x^6+1\right)\cdot \ln\left(x^6+7\right)\,dx = \left(\frac{x^7}{7}+x\right)\cdot\ln\left(x^6+7\right) - \frac{6x^7}{49}+C\,.$$

Zadanie **4 (10 punktów)**

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{n\cdot(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+3)+Bn\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $11/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/18$.

Zadanie **5 (10 punktów)**

Oblicz wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+4)\cdot(x+24)}\,.$$

Doprowadź wynik do postaci $w\cdot\ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+4)\cdot(x+24)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x+24}\,,$$

$$1=A\cdot(x+4)\cdot(x+24)+B\cdot x\cdot(x+24)+C\cdot x\cdot(x+4)\,.$$

Podstawiamy[1] za x wartości 0, -4 i -24 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad 1=96\cdot A,$ skąd $A=1/96,$

dla $x=-4$ $\quad 1=-80\cdot B,$ skąd $B=-1/80,$

dla $x=-24$ $\quad 1=480\cdot C,$ skąd $C=1/480.$

Wobec tego[2]

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+4)\cdot(x+24)}=\int_1^\infty \frac{1/96}{x}-\frac{1/80}{x+4}+\frac{1/480}{x+24}\,dx=$$

$$=\frac{1}{480}\cdot(5\cdot\ln|x|-6\cdot\ln|x+4|+\ln|x+24|)\Big|_{x=1}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{480}\cdot(5\cdot\ln|x|-6\cdot\ln|x+4|+\ln|x+24|)\right)\right)-\frac{1}{480}\cdot(5\cdot\ln 1-6\cdot\ln 5+\ln 25)=$$

$$=\frac{1}{480}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^5\cdot(x+24)}{(x+4)^6}\right)-\frac{1}{480}\cdot(-6\cdot\ln 5+2\cdot\ln 5)=$$

$$=\frac{1}{480}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{24}{x}}{\left(1+\frac{4}{x}\right)^6}\right)+\frac{4}{480}\cdot\ln 5=\frac{1}{480}\cdot\ln 1+\frac{1}{120}\cdot\ln 5=\frac{1}{120}\cdot\ln 5\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{1}{120}\cdot\ln 5$.

Uwaga: Całki $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x+4}\,dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x+24}\,dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln x,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln(x+4),\qquad \lim_{x\to\infty}\ln(x+24)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

[1] Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[2] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest kluczowym elementem rozwiązania. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty.**

Zadanie **6 (10 punktów)**

Oblicz wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^3 x \cdot \cos 3x \, dx \, .$$

Doprowadź wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \, .$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\cos^3 x \cdot \cos 3x = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^3 \cdot \frac{z^3+z^{-3}}{2} = \frac{(z^3+3z+3z^{-1}+z^{-3}) \cdot (z^3+z^{-3})}{16} =$$

$$= \frac{z^6+3z^4+3z^2+2+3z^{-2}+3z^{-4}+z^{-6}}{16} = \frac{\cos 6x}{8} + \frac{3\cos 4x}{8} + \frac{3\cos 2x}{8} + \frac{1}{8} \, .$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^3 x \cdot \cos 3x \, dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 6x}{8} + \frac{3\cos 4x}{8} + \frac{3\cos 2x}{8} + \frac{1}{8} \, dx = \frac{\pi}{4} \, .$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\pi/4$.