**Kolokwium nr 4:** środa 13.12.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 1–500.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 8.12.2023 i wtorek 12.12.2023.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!**

**Zadania podobne do wcześniej rozwiązanych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.**

# 9. Pochodna funkcji.

**423.** Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $f$ określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

**Uwaga:** Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

**424.** Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $f$ określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

**425.** Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $f$ określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^8+1}$.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

**426.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(8)=\ldots\ldots$ $\quad f'(27)=\ldots\ldots$

**427.** $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

**428.** $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}2$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

**429.** $f(x)=\ln\left(x^3+1\right)$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

**430.** $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

**431.** $f(x)=\sqrt{24x+1}$ $\quad f'(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(2)=\ldots\ldots$

**432.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$ $\quad f'(-1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$

**433.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$ $\quad f'(-1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$

**434.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$ $\quad f'(-1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$

**435.** $f(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$ $\quad f'(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(1)=\ldots\ldots$ $\quad f'(3)=\ldots\ldots$

**436.** Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y=x^2$ oraz paraboli o równaniu $y=x^2-8x$.

**437.** Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=-x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

**438.** Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

**439.** Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=1+x+2\sqrt{x}\,.$$
Funkcja $g$ jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji $f$:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$
Obliczyć $g'(100)$.

**440.** Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

**441.** Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

**442.** Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$$
jest różniczkowalna w zerze.

**443.** Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru $a$, że funkcja $f$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{x^4+1}-1}$$
jest różniczkowalna w zerze.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji $f_i$ w zerze.

**444.** $f_1(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ $f_1'(0^-)=$ .......... $f_1'(0^+)=$ ..........

**445.** $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$ $f_2'(0^-)=$ .......... $f_2'(0^+)=$ ..........

**446.** $f_3(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$ $f_3'(0^-)=$ .......... $f_3'(0^+)=$ ..........

**447.** $f_4(x)=\sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$ $f_4'(0^-)=$ .......... $f_4'(0^+)=$ ..........

**448.** $f_5(x)=\sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$ $f_5'(0^-)=$ .......... $f_5'(0^+)=$ ..........

**449.** $f_6(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ $f_6'(0^-)=$ .......... $f_6'(0^+)=$ ..........

**450.** $f_7(x)=\sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$ $f_7'(0^-)=$ .......... $f_7'(0^+)=$ ..........

**451.** Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$
Funkcja $g$ jest złożeniem 2024 egzemplarzy funkcji $f$:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots))).$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{e}\right)$ jest wymierna.

**452.** Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, jest określona wzorem
$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$
Funkcja $g$ jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji $f$:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots))).$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

**453.** Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, jest określona wzorem
$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}.$$
Funkcja $g$ jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji $f$:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots))).$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej $x$ o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

**Uwaga:** $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby $x$.

**454.** $3x^{33}-5x+1$ **455.** $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$ **456.** $\frac{1-x^3}{1+x^3}$ **457.** $\left(x^5+1\right)^{20}$

**458.** $\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+x^{1/3}\right)\left(1+x^{1/4}\right)$ **459.** $\frac{x+1}{x-1}$ **460.** $\frac{x}{x^2+1}$ **461.** $(1+2x)^{30}$

**462.** $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1/3}$ **463.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$ **464.** $2^{x+3}$ **465.** $x10^x$ **466.** $\frac{x}{e^x}$

**467.** $x^2(x+1)e^x$ **468.** $e^{x^2}$ **469.** $e^{e^x}$ **470.** $10^{2x-3}$ **471.** $2^{3^x}$ **472.** $|x|^3$

**473.** $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ **474.** $x^5(x^6-8)^{1/3}$ **475.** $e^{2x+3}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$ **476.** $\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$

**477.** $\operatorname{sgn}(x)$ **478.** $0$ dla $x<0$ , $x^2$ dla $x\geqslant 0$ **479.** $x$ dla $x<0$ , $x^2$ dla $x\geqslant 0$

**480.** $e^{-|x|}$ **481.** $\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$ **482.** $\{x\}$ **483.** $\{x\}^3$ **484.** $e^e$ **485.** $\frac{\pi^{10}}{x-e}$

**486.** $e^x$ dla $x<0$ , $1+x$ dla $x\geqslant 0$ **487.** $x^7+e^2$ **488.** $(x+e)^{20}$ **489.** $\operatorname{sgn}\left(x^5-x^3\right)$

**490.** $\operatorname{arctg}\left(x^{2023}\right)$ **491.** $(\operatorname{arctg} x)^{2023}$ **492.** $\left(\operatorname{arctg}\left(x^{2023}\right)\right)^{2023}$

**493.** $\left(\operatorname{arctg}\left(x^{2023}+2023\right)\right)^{2023}$ **494.** $\left(x^2+1\right)^{x^2}$ **495.** $x^{x^x}$ **496.** $e^{e^{e^{e^x}}}$

**497.** $\frac{x^{2023}}{x^{666}+1729}$ **498.** $\sqrt[2023]{x}$ **499.** $\sqrt[666]{x^{37}+1}$ **500.** $\frac{x^{666}}{\sqrt[37]{x^2+1}}$