341. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{0}$

b) $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{0}$

c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$

d) $a=2$, $b=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{0}$

e) $a=\mathbf{-3}$, $b=3$, $c=\mathbf{0}$

f) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=5$

342. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

b) $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{2}$

c) $a=\mathbf{-3}$, $b=\mathbf{3}$, $c=3$

d) $a=4$, $b=\mathbf{-4}$, $c=\mathbf{-4}$

e) $a=\mathbf{-5}$, $b=5$, $c=\mathbf{5}$

f) $a=\mathbf{-6}$, $b=\mathbf{6}$, $c=6$

343. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=\mathbf{3}$, $e=\mathbf{3}$

b) $a=1$, $b=2$, $c=$ **NIE**, $d=4$, $e=$ **NIE**

c) $a=1$, $b=\mathbf{3}$, $c=\mathbf{5}$, $d=4$, $e=5$

d) $a=\mathbf{2}$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

e) $a=6$, $b=7$, $c=\mathbf{10}$, $d=\mathbf{13}$, $e=10$

f) $a=6$, $b=\mathbf{3}$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

344. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych $(a,\,b)$, dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=a+3b$$

oraz

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a+3b=b,$$

czyli

$$a=-2b.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a=-2b$.

345. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ **–3**, $d=$ **–3**
b) $a=$ **–5**, $b=2$, $c=3$, $d=$ **3**
c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$, $d=4$
d) $a=2$, $b=3$, $c=$ **–5**, $d=$ **–5**
e) $a=$ **–9**, $b=3$, $c=6$, $d=$ **6**
f) $a=$ **dowolne**, $b=$ **–6–a**, $c=6$, $d=6$

346. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=\mathbf{-5}, \quad b=2, \quad c=3, \quad d=4$

b) $a=1, \quad b=\mathbf{-4}, \quad c=3, \quad d=4$

c) $a=1, \quad b=2, \quad c=\mathbf{-3}, \quad d=4$

d) $a=1, \quad b=2, \quad c=3, \quad d=\mathbf{NIE}$

347. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie:

Oczywiście funkcja f jest ciągła w każdym punkcie różnym od a i b.

Ponadto

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=4$$

oraz

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\left|a^2-5\right|,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4=\left|a^2-5\right|.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do

$$a^2-5=\pm 4,$$

$$a^2=5\pm 4,$$

skąd $a\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Podobnie

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=\left|b^2-5\right|$$

oraz

$$f(b)=\lim_{x\to b^+} f(x)=4,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4=\left|b^2-5\right|,$$

czyli $b\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Zatem funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a,b\in\{-3, -1, 1, 3\}$, co w połączeniu z warunkiem $a<b$ prowadzi do sześciu par (a, b) spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez pary $(-3, -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

348. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$.

349. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{3}$, $b=\mathbf{3}$.

350. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{5}$, $b=\mathbf{5}$.

351. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\sqrt{\mathbf{57}}$, $b=\sqrt{\mathbf{57}}$.

352. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{11}$, $b=\mathbf{11}$.

353. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a,b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad x<a\\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=-\mathbf{1}$, $b=\mathbf{0}$ $a=-\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$ $a=\mathbf{0}$, $b=\mathbf{1}$

354. Podać wszystkie sześć par parametrów (a,b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{dla} \quad x<a\\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{3}$ $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{7}$ $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{9}$

$a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{7}$ $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{9}$ $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{9}$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

355.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 1 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{-1}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

356.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

357.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{-1}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

358.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{-2}, \qquad b=\mathbf{3}.$$

359.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 2x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

360. $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-8}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-8}, & b=\mathbf{8} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{8} \end{array}$$

361. $$f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-2\sqrt{2}}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-2\sqrt{2}}, & b=\mathbf{2\sqrt{2}} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{2\sqrt{2}} \end{array}$$

362. $$f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-2}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-2}, & b=\mathbf{2} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{2} \end{array}$$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

363. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=\ -\infty$

364. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=\ +\infty$

365. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=\ +\infty$

366. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=\ -\infty$

367. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=\ +\infty$

368. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=\ 0$

369. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=\ 0$

370. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=\ +\infty$

371. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x=\ \pi/2$

372. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}2x=\ \pi/2$

373. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x=\ \pi/2$

374. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x=\ -\pi/2$

375. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=\ 1/48$

376. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}=\ 16$

377. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=\ 1/3$

378. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{1/x}}=\ +\infty$

379. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{1/x}}=\ 1$

380. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{1/x}}=\ 2$

381. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}=\ +\infty$

382. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}=\ 2$

383. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}=\ 4$

384. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_4 x\}=\ 1$

385. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_4 x\}=\ 0$

386. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_8 x\}=\ 1/3$

387. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_8 x\}=\ 1/3$

388. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$ **389.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$

390. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = e^{e^4}$ **391.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = e^{e^{27}}$

392. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \mathbf{32}$ **393.** $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \mathbf{9}$

394. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \mathbf{64}$

395. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\big) = \mathbf{0}$

396. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\big) = \mathbf{5}$

397. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\big) = \mathbf{3}$

398. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^2}$ **399.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^8}$

400. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \sqrt{\mathbf{e}}$ **401.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt[4]{\mathbf{e}}$

402. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+x^3+x^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4}+\frac{3\cdot x^2}{4}=\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3\cdot x^2}{4}\geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyzanaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{4}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{x^2}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

Tyma razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+\frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-\frac{1}{4}$.

403. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+4x^3+6x^2+1=x^4+4x^3+4x^2+2x^2+1=\left(x^2+2x\right)^2+2x^2+1>0,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+4x^3+6x^2+1)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)}=$$

$$=\frac{4}{(1+1)\cdot(1+1)}=1.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)=-1.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^4+4x^3+6x^2+1\right)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)}=$$

$$=\frac{4}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-1\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}$$

przy $s=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-1$.

404. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^8+x^7+x^6+7=\left(x^4+\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{3x^6}{4}+7>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}=1+1=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{8}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^8-t^8}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[8]{x^8}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}\right)=1-1=0\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{x^2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt[4]{x^8}}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}-1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{8}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^8-t^8}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}$$

przy $s=\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+\frac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y=-\frac{1}{8}$.