Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w piątek 1.12.2023 i wtorek 5.12.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zadania podobne do wcześniej rozwiązanych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

8. Granica funkcji.

341. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots$ **b)** $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=2$, $c=\ldots\ldots\ldots$

c) $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=3$ **d)** $a=2$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots$

e) $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=3$, $c=\ldots\ldots\ldots$ **f)** $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=5$

342. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots$ **b)** $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=2$, $c=\ldots\ldots\ldots$

c) $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=3$ **d)** $a=4$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots$

e) $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=5$, $c=\ldots\ldots\ldots$ **f)** $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$, $c=6$

343. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $e=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $a=1$, $b=2$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $d=4$, $e=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $a=1$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $d=4$, $e=5$

d) $a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $a=6$, $b=7$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $d=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $e=10$

f) $a=6$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=8$, $d=9$, $e=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

344. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych $(a,\, b)$, dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

345. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=$ ....

b) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$ ...., $d=$ ....

e) $a=$ ...., $b=3$, $c=6$, $d=$ ....

f) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=6$, $d=6$

346. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

347. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych $(a,\, b)$, gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

348. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$

349. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$

350. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$

351. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$

352. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots$

353. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a,b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad x<a\\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$

354. Podać wszystkie sześć par parametrów (a,b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{dla} \quad x<a\\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$

$a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

355.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 1 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

356.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

357.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

358.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

359.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 2x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

360. $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

361. $$f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

362. $$f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

363. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

364. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

365. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

366. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

367. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

368. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

369. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

370. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

371. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x=$ ....

372. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}2x=$ ....

373. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x=$ ....

374. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x=$ ....

375. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=$ ....

376. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}=$ ....

377. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=$ ....

378. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{1/x}}=$ ....

379. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{1/x}}=$ ....

380. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{1/x}}=$ ....

381. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

382. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

383. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

384. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_4 x\}=$ ....

385. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_4 x\}=$ ....

386. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_8 x\}=$ ....

387. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_8 x\}=$ ....

388. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} =$ ....

389. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} =$ ....

390. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} =$ ...

391. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} =$ ...

392. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} =$ ....

393. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} =$ ....

394. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} =$ ....

395. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\right) =$ ....

396. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\right) =$ ....

397. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\right) =$ ....

398. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} =$ ....

399. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} =$ ....

400. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} =$ ....

401. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} =$ ....

402. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

403. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}\,.$

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

404. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}\,.$

405. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\log_4(2^x+8^x)\,.$$

Wyznaczyć wartości granic ciągów:

406. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **407.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2023}\right)$ **408.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2023n+1}\right)$

409. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2023}$ **410.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2023}\right)^{2023}$ **411.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2023n+1}\right)^{2023}$

412. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ **413.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2023n}$ **414.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2023}$

415. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2023}}$ **416.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^{n}$ **417.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}$

418. Obliczyć granicę ciągu
$$\lim_{n\to\infty}\left(a\cdot\frac{14n+1}{15n+1}\right)^{n}$$
dla takiej wartości rzeczywistej dodatniej parametru a, aby granica była dodatnia i skończona.

419. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\log_2\left(2^{2x}-2^{4x+1}+2^{6x}\right)\,.$$

420. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{x}{2}\,.$$

421. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}\,.$$

422. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}+|x|\,.$$