317. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,,$$
gdzie $f(x)=\sqrt{x^2+37}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{x^2+37}-\sqrt{y^2+37}\right|=\left|\sqrt{x^2+37}-\sqrt{y^2+37}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}=$$
$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność
$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}\leqslant 1\,,$$
która jest równoważna nierówności
$$|x+y|\leqslant\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}\,.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$:
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}\,.$$

318. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[8]{x^2+10^8}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{4000}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia
$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\,,$$
który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$
Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^2+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^2+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^2+10^8}-\sqrt[8]{y^2+10^8}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^2+10^8)-(y^2+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\,. \qquad (1)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}<1\,. \qquad (2)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,. \qquad (3)$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+10^8}+\sqrt[4]{0+10^8}}=\frac{1}{100+100}=\frac{1}{200}\,. \qquad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{200}\cdot 1=\frac{|x-y|}{4000}\,.$$

319. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{12}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy zgodnie ze wzorem na różnicę sześcianów lewą stronę dowodzonej nierówności, a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x,\,y\geqslant 8$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}\leqslant\frac{|x-y|}{3\cdot\sqrt[3]{8^2}}=\frac{|x-y|}{12}\,,$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\,y\geqslant 8$.

320. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności x, $y\geqslant 4$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right|=\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}=\frac{|x-y|}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{xy}}\leqslant\frac{|x-y|}{\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)\cdot\sqrt{16}}=$$
$$=\frac{|x-y|}{(2+2)\cdot 4}=\frac{|x-y|}{16}\,,$$

co kończy dowód nierówności danej w treści zadania.

321. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+10^4}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+10^4}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+10^4}-\sqrt[4]{y^2+10^4}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^2+10^4)-(y^2+10^4)}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}\right|=$$
$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}=$$
$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}<1\,.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+10^4}+\sqrt[4]{0+10^4}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot 1=\frac{|x-y|}{20}\,.$$

322. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^4+1}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^4+1}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{y^4+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^4+1)-(y^4+1)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}\right|= \qquad (1)$$

$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}\,. \qquad (2)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}<1\,. \qquad (3)$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2=\sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\,,$$

skąd
$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}<1\,. \tag{4}$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:
$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$
$$=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}\leqslant|x-y|\cdot1\cdot1=|x-y|\,.$$

323. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia
$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\,,$$
który przy założeniu $a+b\neq0$ można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$
Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^4+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^4+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^4+10^8}-\sqrt[8]{y^4+10^8}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^4+10^8)-(y^4+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\right|=$$
$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$
$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\,. \tag{1}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\,,$$
skąd
$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}<1\,. \tag{2}$$

Z kolei równość $x^2=\sqrt{x^4}$ prowadzi do:
$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}<1\,. \tag{3}$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,. \tag{4}$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot1\cdot1=\frac{|x-y|}{20}\,.$$

324. Niech funkcja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[16]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[1,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności stosując czterokrotnie wzór na różnicę kwadratów[1], a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x,\,y\geqslant1$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[16]{x}-\sqrt[16]{y}\right|=\frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{x}+\sqrt[16]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{1}+\sqrt[16]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{1}+\sqrt[8]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1}\right)\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)}=\frac{|x-y|}{16}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\,y\geqslant1$.

325. Niech funkcja $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[3,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\,y\geqslant3$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right|=\left|\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{xy}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$

[1] Można również zastosować ogólny wzór na różnicę n-tych potęg dla $n=16$.

$$\leqslant |x-y| \cdot \left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}\right) = |x-y| \cdot \frac{3}{3^4} = |x-y| \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{|x-y|}{27} \leqslant \frac{|x-y|}{25},$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geqslant 3$.

326. Niech funkcja $f:[16, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [16, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{128}.$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geqslant 16$:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right| = \frac{\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right|}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\sqrt[4]{xy}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)} =$$

$$= \frac{|x-y|}{\sqrt[4]{xy}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} \leqslant \frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16\cdot 16}\cdot\left(\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{16}\right)\cdot\left(\sqrt{16}+\sqrt{16}\right)} =$$

$$= \frac{|x-y|}{4\cdot(2+2)\cdot(4+4)} = \frac{|x-y|}{128},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geqslant 16$.

327. Niech funkcja $f:[8, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant C \cdot |x-y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/60$.

Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geqslant 8$:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leqslant \frac{|x-y|}{8\cdot 8} = \frac{|x-y|}{64} \leqslant \frac{|x-y|}{60},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=1/60$ i dowolnych $x, y \geqslant 8$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/80$.

Rozwiązanie:
Dla $x=8$ oraz $y=9$ mamy $|x-y|=1$ oraz

$$|f(x)-f(y)| = \frac{1}{72} > \frac{|x-y|}{80},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geqslant 8$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C=1/80$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$.

328. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y\geqslant 25$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt{25}+\sqrt{25}}=\frac{|x-y|}{5+5}=\frac{|x-y|}{10}\,,$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=1/10$ i dowolnych $x, y\geqslant 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x=25$ oraz $y=36$ mamy $|x-y|=11$ oraz

$$|f(x)-f(y)|=1=\frac{|x-y|}{11}>\frac{|x-y|}{12}\,,$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y\geqslant 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C=1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[25,\infty)$.

329. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x)-f(y)|=\left|x^2-y^2\right|=(x+y)\cdot|x-y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$x+y>100\,.$$

Możemy więc wskazać $x=50$, $y=51$.

330. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{xy}\cdot|x-y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy} > 100\,,$$

czyli

$$xy < \frac{1}{100}\,.$$

Możemy więc wskazać $x=1/10$, $y=1/11$.

331. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}\,.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>0,6\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do

$$|f(x)-f(y)|=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}\,.$$

Dana w treści zadania nierówność będzie spełniona, jeżeli $x\neq y$ oraz

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}>0,6\,. \tag{1}$$

Dla uzyskania nierówności (1) wystarczy przyjąć, że x i y są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunki

$$x>0,6\cdot\sqrt{x^2+10^8} \tag{2}$$

oraz

$$y>0,6\cdot\sqrt{y^2+10^8}\,. \tag{3}$$

Przekształcanie nierówności (2) prowadzi (przy założeniu dodatniości x) do nierówności równoważnych:

$$x^2>0,6^2\cdot x^2+0,6^2\cdot 10^8\,,$$

$$0,64\cdot x^2>0,36\cdot 10^8\,,$$

$$x^2>\frac{0,36\cdot 10^8}{0,64}\,,$$

$$x^2>\frac{36\cdot 10^8}{64}\,,$$

$$x>\frac{6\cdot 10^4}{8}\,,$$

$$x>\frac{3\cdot 10^4}{4}\,,$$

$$x>7500\,.$$

Analogicznie nierówność (3) jest równoważna nierówności $y>7500$.

Dana w treści zadania nierówność jest więc prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y większych od 7500, np. dla $x=7501$ i $y=7502$.