Kolokwium nr 3: środa 29.11.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 1–340.

7. Funkcje ciągłe.

Przykłady z wykładu.

317. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,,$$

gdzie $f(x)=\sqrt{x^2+37}$.

318. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[8]{x^2+10^8}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{4000}\,.$$

319. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{12}\,.$$

320. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 24.11.2023 i wtorek 28.11.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

321. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

322. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

323. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

324. Niech funkcja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[16]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[1,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

325. Niech funkcja $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[3,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,.$$

326. Niech funkcja $f:[16,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[16,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{128}\,.$$

327. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/60$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/80$.

328. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

329. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

330. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

331. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}\,.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>0,6\cdot|x-y|\,.$$

332. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[16]{x^2+10^{16}}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{80\,000\,000}\,.$$

333. Dowieść, że równanie $\cos x=x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

334. Dowieść, że równanie $\cos x=x^2$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

335. Dowieść, że równanie
$$x^{2023}+x=2023$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie.

336. Dowieść, że równanie
$$x^2=25\pi^2\cdot\cos x$$
ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

337. Dowieść, że równanie
$$x^{1000000}+2=(1,000001)^x$$
ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

338. Rozważamy funkcję $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określoną wzorem
$$f(x)=\sqrt{x}\,.$$
Udowodnić, że funkcja f nie spełnia warunku Lipschitza[1].

339. Udowodnić, że funkcja z poprzedniego zadania jest jednostajnie ciągła[2]. W tym celu udowodnić, że dla każdych $x,y\geqslant 0$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{|x-y|}\,.$$

340. Dla których liczb
$$n\in\left\{2,\ 4,\ 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200,\ 500,\ 1000,\ 10^5,\ 10^{10},\ 10^{30},\ 10^{100},\ 10^{1000}\right\}$$
wykres funkcji
$$f(x)=2^x$$
przecina wykres funkcji
$$g(x)=x^n+4\,,$$
jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm? Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

---

[1]Mówimy, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli istnieje taka stała C, że dla każdych $x,y\in D_f$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

[2]W tej chwili nie musisz znać i rozumieć pojęcia jednostajnej ciągłości. Zadanie polega na udowodnieniu podanej nierówności.