W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

270. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 1}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

271. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)^2}$ $D_f=[\mathbf{1,\ +\infty})$

272. $f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x-4)}$ $D_f=\mathbf{\{1\}}\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

273. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=[\mathbf{-1,\ 1}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

274. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=[\mathbf{-2,\ 1}]\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

275. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -2}]\cup[\mathbf{-1,\ 1}]\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

276. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)^2\cdot(x^2-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -2}]\cup\mathbf{\{-1\}}\cup\mathbf{\{1\}}\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

277. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x-16)}$ $D_f=[\mathbf{4,\ 9}]\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

278. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2022}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=\mathbf{\{4\}}\cup\mathbf{\{9\}}\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

279. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2021}\cdot(x-16)^{2022}}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 4}]\cup[\mathbf{9,\ +\infty})$

280. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 4}]\cup\mathbf{\{9\}}\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

281. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -4}]\cup\mathbf{\{4\}}\cup[\mathbf{9,\ +\infty})$

282. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=[\mathbf{-4,\ -3}]\cup[\mathbf{3,\ +\infty})$

283. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$
$=(\mathbf{-\infty,\ -4}]\cup[\mathbf{-3,\ -2}]\cup[\mathbf{2,\ 3}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

284. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^4-16)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -3}]\cup\mathbf{\{-2\}}\cup\mathbf{\{2\}}\cup[\mathbf{3,\ +\infty})$

285. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(5-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 8}]\cup[\mathbf{27,\ 32}]$

286. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(2-\log_5 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 8}]\cup[\mathbf{25,\ 27}]$

287. $f(x)=\sqrt{(3-\log_4 x)\cdot(6-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=(\mathbf{0},\ \mathbf{27}]\cup\{\mathbf{64}\}$

288. $f(x)=\sqrt{\log_2\log_3 x}$ $D_f=[\mathbf{3},\ +\infty)$

289. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2 x}$ $D_f=[\mathbf{2},\ +\infty)$

290. $f(x)=\sqrt{\log_5\log_3\log_2 x}$ $D_f=[\mathbf{8},\ +\infty)$

291. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2\log_5 x}$ $D_f=[\mathbf{25},\ +\infty)$

292. $f(x)=\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ +\infty)$

293. $f(x)=\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ \mathbf{256})$

294. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ \mathbf{16})$

295. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1},\ \mathbf{4})$

296. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=\left(\mathbf{1},\ \sqrt{\mathbf{2}}\right)$

297. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z następujących nierówności, wykorzystujących nierówność trójkąta oraz założenia o funkcji f:

$$|f(6)-f(0)|=|f(6)-f(10)+f(10)-f(0)|\leqslant|f(6)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant$$
$$\leqslant 10\cdot|6-10|+|10-0|=40+10=50\,.$$

298. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$
$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(5)|\leqslant 10\cdot|8-5|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\left|\big(f(8)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\right|\leqslant|f(8)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 30+5=35\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5\,,$$
$$|f(10)-f(5)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(10)|\leqslant 10\cdot|8-10|=20\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\left|\big(f(8)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(8)-f(10)|+|f(10)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 20+5+5=30\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

299. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$
$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(10)| \leqslant 10 \cdot |17-10| = 70\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)| = \Big|\big(f(17)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(0)\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant |f(17)-f(10)|+|f(10)-f(0)| \leqslant 70+10 = 80\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)| \leqslant 10\,,$$
$$|f(20)-f(10)| \leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(20)| \leqslant 10 \cdot |17-20| = 30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)| = \Big|\big(f(17)-f(20)\big)+\big(f(20)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(0)\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant |f(17)-f(20)|+|f(20)-f(10)|+|f(10)-f(0)| \leqslant 30+10+10 = 50\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

300. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)| \leqslant (x-y)^2\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0 = x, \quad t_1 = x+\frac{y-x}{n}, \quad t_2 = x+2\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_3 = x+3\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_4 = x+4\cdot\frac{y-x}{n}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad t_{n-2} = x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_{n-1} = x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n}, \quad t_n = x+n\cdot\frac{y-x}{n} = y\,.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności

$$|f(t_0)-f(t_1)| \leqslant (t_0-t_1)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant (t_1-t_2)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_2)-f(t_3)| \leqslant (t_2-t_3)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

....

$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})| \leqslant (t_{n-2}-t_{n-1})^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2},$$

$$|f(t_{n-1})-f(t_n)| \leqslant (t_{n-1}-t_n)^2 = \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n^2}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)| =$$

$$= |(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))| \leqslant$$

$$\leqslant |f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(x-y)^2}{n^2} = \frac{(x-y)^2}{n}.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{(x-y)^2}{n}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

301. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = -\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f jest krzywą o równaniu

$$y = -\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24},$$

czyli

$$24y+25x = \sqrt{49x^2+37}.$$

Z powyższego rówania wynika

$$24y+24x = \sqrt{49x^2+37}-x \geqslant \sqrt{49x^2+37}-|x| = \sqrt{49x^2+37}-\sqrt{x^2} > 0,$$

a z podobnego równania

$$24y+25x = -\sqrt{49x^2+37}$$

dochodzimy do

$$24y+24x = -\sqrt{49x^2+37}-x \leqslant -\sqrt{49x^2+37}+|x| = -\sqrt{49x^2+37}+\sqrt{x^2} < 0.$$

Zatem równanie wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$. Otrzymujemy kolejno

$$576y^2+1200xy+625x^2 = 49x^2+37, \qquad x+y>0$$

$$576y^2+1200xy+576x^2 = 37, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x=y$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

302. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru a, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+1}$$
jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f(0)=1$ oraz $f(1)=a+\sqrt{2}$, funkcja f ma szansę być odwrotną do samej siebie tylko wtedy, gdy
$$0=f(f(0))=a+\sqrt{2}\,,$$
czyli tylko dla $a=-\sqrt{2}$.

Wykażemy, że funkcja f określona wzorem
$$f(x)=-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{x^2+1}$$
jest odwrotna do samej siebie.

Wykres funkcji f jest krzywą[1] o równaniu
$$y=-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{x^2+1}\,,$$
czyli
$$y+\sqrt{2}\cdot x=\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (\heartsuit)$$
Z powyższego równania wynika
$$y+x=\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\geqslant\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|>\sqrt{x^2}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=$$
$$=|x|-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot|x|\geqslant 0\,,$$
natomiast z podobnego równania
$$y+\sqrt{2}\cdot x=-\sqrt{x^2+1} \qquad (\diamondsuit)$$
dochodzimy do
$$y+x=-\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\leqslant-\sqrt{x^2+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|<-\sqrt{x^2}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=$$
$$=-|x|+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=\left(\sqrt{2}-2\right)\cdot|x|\leqslant 0\,.$$

Podsumujmy:
$$y+\sqrt{2}\cdot x=\sqrt{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad x+y>0$$
oraz
$$y+\sqrt{2}\cdot x=-\sqrt{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad x+y<0\,,$$
a więc w równaniu
$$y+\sqrt{2}\cdot x=\pm\sqrt{x^2+1}$$

[1] Z uzyskanej w dalszej części rozwiązania postaci równania tej krzywej można stwierdzić, że krzywa ta jest hiperbolą. A dokładniej jest jedną gałęzią hiperboli, podczas gdy druga gałąź jest opisywana przez równanie $(\diamondsuit)$.

znak "$\pm$" jest taki sam jak znak liczby $x+y$.

Idea powyższych oszacowań jest następująca: W wyrażeniu

$$\pm\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\,,$$

które jest równe sumie $x+y$, pierwszy składnik ma większą wartość bezwzględną niż drugi, a więc znak całego wyrażenia (czyli znak $x+y$) będzie taki sam jak znak pierwszego składnika, czyli jak znak "$\pm$".

Zatem równanie ($\heartsuit$) wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$, gdyż nierówność ta wymusza, aby pierwiastek był ze znakiem plus, a nie minus.

Otrzymujemy kolejno

$$y^2+2\sqrt{2}\cdot xy+2x^2=x^2+1, \qquad x+y>0$$
$$y^2+2\sqrt{2}\cdot xy+x^2=1, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

Odpowiedź: Jedyną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-\sqrt{2}$.

303. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru a, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Identyczne jak w zadaniu poprzednim, gdyż zmiana 1 na 2 pod pierwiastkiem nie wpływa na tok rozumowania.

Odpowiedź: Jedyną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-\sqrt{2}$.

304. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}$$

na przedziale $[-1/k,\,b]$ była odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest fragment krzywej o równaniu

$$y=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}\,,$$

czyli

$$y-x-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{kx+1}}{2}\,,$$

a to z kolei jest fragmentem krzywej o równaniu

$$y-x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{kx+1}}{2}\,.$$

Obustronne podniesienie do kwadratu powyższego równania prowadzi do

$$y^2+x^2+\frac{1}{4}-2xy-y+x=\frac{kx}{4}+\frac{1}{4}\,,$$

czyli

$$y^2+x^2-2xy-y+x\cdot\left(1-\frac{k}{4}\right)=0\,.$$

Powyższe równanie będzie symetryczne ze względu na zamianę x i y, jeżeli współczynnik przy x będzie taki sam jak przy y, co prowadzi do warunku

$$1-\frac{k}{4}=-1$$

spełnionego dla $k=8$.

Wobec tego podejrzewamy, że w zadaniu chodzi o funkcję określoną wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}\,.$$

Pozostaje wyznaczyć przedział, na którym jest ona odwrotna do samej siebie i to precyzyjnie uzasadnić – na razie wiemy tylko, że wykres funkcji f jest jakimś fragmentem pewnej krzywej symetrycznej względem prostej o równaniu $y=x$.

Na krzywą określoną równaniem

$$y^2+x^2-2xy-y-x=0$$

składają się wykresy dwóch funkcji $f,g:[-1/8,\,\infty)\to\mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}$$

oraz

$$g(x)=x+\frac{1+\sqrt{8x+1}}{2}\,.$$

Zauważmy, że

$$f\left(-\frac{1}{8}\right)=g\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}\qquad\text{oraz}\qquad f\left(\frac{3}{8}\right)=-\frac{1}{8}\,.$$

Ponadto funkcja g jest rosnąca (a więc przyjmuje wartości $\geqslant 3/8$), natomiast wobec[2]

$$f(x)=\left(\sqrt{x+\frac{1}{8}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{8}$$

---

[2]Mniej trikowe jest użycie pochodnej (będzie za kilka tygodni):

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{8x+1}}\begin{cases}<0 & \text{dla}\quad x<3/8\\ >0 & \text{dla}\quad x>3/8\end{cases}$$

Konieczność użycia takiego triku w tym i w kolejnym zadaniu wynika z mojego niedopatrzenia: układając listę zadań przeoczyłem fakt, że najprostsze rozumowanie wymaga użycia pochodnej.

wnioskujemy, że funkcja f jest malejąca[3] na przedziale $[-1/8,\, 3/8]$ i przekształca ten przedział na siebie.

Zatem wykres funkcji f ograniczonej do przedziału $[-1/8,\, 3/8]$ jest określony warunkami

$$y^2+x^2-2xy-y-x=0, \qquad x,y\leqslant 3/8\,,$$

a zatem jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=8$ i $b=3/8$.

Uwaga: Zauważmy, że krzywą o równaniu

$$y^2+x^2-2xy-y-x=0$$

możemy podzielić na 3 części:

• wykres funkcji f na przedziale $[-1/8,\, 3/8]$ – składa się ze wszystkich punktów krzywej spełniających warunek $x,y\leqslant 3/8$,

• wykres funkcji g na przedziale $(-1/8,\, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $y>3/8$,

• wykres funkcji f na przedziale $(3/8,\, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $x>3/8$. Ten wykres jest symetryczny do wykresu funkcji g względem prostej o równaniu $y=x$.

305. Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+1-\sqrt{kx+1}$$

na przedziale $[-1/k,\, b]$ była odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest fragment krzywej o równaniu

$$y=x+1-\sqrt{kx+1}\,,$$

czyli

$$y-x-1=-\sqrt{kx+1}\,,$$

a to z kolei jest fragmentem krzywej o równaniu

$$y-x-1=\pm\sqrt{kx+1}\,.$$

Obustronne podniesienie do kwadratu powyższego równania prowadzi do

$$y^2+x^2+1-2xy-2y+2x=kx+1\,,$$

czyli

$$y^2+x^2-2xy-2y+x\cdot(2-k)=0\,.$$

[3]I rosnąca na przedziale $[3/8,\, \infty)$.

Powyższe równanie będzie symetryczne ze względu na zamianę x i y, jeżeli współczynnik przy x będzie taki sam jak przy y, co prowadzi do warunku

$$2-k=-2$$

spełnionego dla $k=4$.

Wobec tego podejrzewamy, że w zadaniu chodzi o funkcję określoną wzorem

$$f(x)=x+1-\sqrt{4x+1}\,.$$

Pozostaje wyznaczyć przedział, na którym jest ona odwrotna do samej siebie i to precyzyjnie uzasadnić – na razie wiemy tylko, że wykres funkcji f jest jakimś fragmentem pewnej krzywej symetrycznej względem prostej o równaniu $y=x$.

Na krzywą określoną równaniem

$$y^2+x^2-2xy-2y-2x=0$$

składają się wykresy dwóch funkcji $f,g:[-1/4,\,\infty)\to\mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f(x)=x+1-\sqrt{4x+1}$$

oraz

$$g(x)=x+1+\sqrt{4x+1}\,.$$

Zauważmy, że

$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=g\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4} \qquad \text{oraz} \qquad f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}\,.$$

Ponadto funkcja g jest rosnąca (a więc przyjmuje wartości $\geqslant 3/4$), natomiast wobec[4]

$$f(x)=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}-1\right)^2-\frac{1}{4}$$

wnioskujemy, że funkcja f jest malejąca[5] na przedziale $[-1/4,\,3/4]$ i przekształca ten przedział na siebie.

Zatem wykres funkcji f ograniczonej do przedziału $[-1/4,\,3/4]$ jest określony warunkami

$$y^2+x^2-2xy-2y-2x=0, \qquad x,y\leqslant 3/4\,,$$

a zatem jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=4$ i $b=3/4$.

Uwaga: Zauważmy, że krzywą o równaniu

$$y^2+x^2-2xy-2y-2x=0$$

możemy podzielić na 3 części:

[4]Mniej trikowe jest użycie pochodnej (będzie za kilka tygodni):

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{4x+1}}\begin{cases} <0 & \text{dla} \quad x<3/4 \\ >0 & \text{dla} \quad x>3/4 \end{cases}$$

[5]I rosnąca na przedziale $[3/4,\,\infty)$.

• wykres funkcji g na przedziale $(-1/4, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $y > 3/4$,

• wykres funkcji f na przedziale $(3/4, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $x > 3/4$ – ten wykres jest symetryczny do wykresu funkcji g względem prostej o równaniu $y = x$,

• wykres funkcji f na przedziale $[-1/4, 3/4]$ – składa się ze wszystkich punktów krzywej spełniających warunek $x, y \leqslant 3/4$.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = a|x| + bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x)) = x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

306. $a = 1$, $b = \boldsymbol{-\sqrt{2}}$

307. $a = -1$, $b = \boldsymbol{-\sqrt{2}}$

308. $a = 2$, $b = \boldsymbol{-\sqrt{5}}$

309. $a = -2$, $b = \boldsymbol{-\sqrt{5}}$

310. $a = 3$, $b = \boldsymbol{-\sqrt{10}}$

311. $a = -3$, $b = \boldsymbol{-\sqrt{10}}$

312. $a = 3/4$, $b = \boldsymbol{-5/4}$

313. $a = -3/4$, $b = \boldsymbol{-5/4}$

314. $a = 4/3$, $b = \boldsymbol{-5/3}$

315. $a = -4/3$, $b = \boldsymbol{-5/3}$

316. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań **316.a-316.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

316.a. $f(x) = \{|x|\}$ **5**

316.b. $f(x) = \{x\}^2$ **1**

316.c. $f(x) = \{|x|\}^2$ **4**

316.d. $f(x) = \sqrt{\{x\}}$ **8**

316.e. $f(x) = \sqrt{\{|x|\}}$ **7**

316.f. $f(x) = \left\{\sqrt{|x|}\right\}$ **6**

316.g. $f(x) = \sqrt[5]{\{x\}}$ **9**

316.h. $f(x) = \{\sqrt[5]{x}\}$ **10**

316.i. $f(x) = \{x\}^5$ **2**

316.j. $f(x) = \{|x|\}^5$ **3**