**Zadania do omówienia[1] na ćwiczeniach**
**w piątek 17.11.2023 i wtorek 21.11.2023.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!**

## 6. Funkcje.

**268.** Niech $f$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\log_x 64\,.$$

Podać obrazy i przeciwobrazy zbiorów:

**a)** $f\left[\left(0,\frac{1}{2}\right)\right]$ **b)** $f\left[\left(\frac{1}{2},1\right)\right]$ **c)** $f[(1,2)]$ **d)** $f[(2,\infty)]$

**e)** $f^{-1}[(-\infty,-2)]$ **f)** $f^{-1}[(-2,0)]$ **g)** $f^{-1}[(0,2)]$ **h)** $f^{-1}[(2,\infty)]$

**269.** Podać wzór i dziedzinę funkcji odwrotnej do funkcji $f$ określonej podanym wzorem:

**a)** $f(x)=x^3+3x^2+3x$ **b)** $f(x)=\sqrt{x^3+8}$ **c)** $f(x)=\ln(1+e^x)$ **d)** $f(x)=\ln(1-e^x)$

W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji $f$ określonej podanym wzorem.

**270.** $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=$ ..........................................

**271.** $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)^2}$ $D_f=$ ..........................................

**272.** $f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x-4)}$ $D_f=$ ..........................................

**273.** $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=$ ..........................................

**274.** $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=$ ..........................................

**275.** $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=$ ..........................................

**276.** $f(x)=\sqrt{(x^2-1)^2\cdot(x^2-4)}$ $D_f=$ ..........................................

**277.** $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x-16)}$ $D_f=$ ....................................

**278.** $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2022}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=$ ..........................

**279.** $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2021}\cdot(x-16)^{2022}}$ $D_f=$ ..........................

**280.** $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=$ ..........................

[1] Sugeruję najpierw omówić zadania od **292** do końca listy.

**281.** $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$ ..................................

**282.** $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$ ..................................

**283.** $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$ ..................................

**284.** $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^4-16)}$ $D_f=$ ..................................

**285.** $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(5-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=$ .........................

**286.** $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(2-\log_5 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=$ .........................

**287.** $f(x)=\sqrt{(3-\log_4 x)\cdot(6-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=$ .........................

**288.** $f(x)=\sqrt{\log_2\log_3 x}$ $D_f=$ ..........................................

**289.** $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2 x}$ $D_f=$ ..........................................

**290.** $f(x)=\sqrt{\log_5\log_3\log_2 x}$ $D_f=$ ..........................................

**291.** $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2\log_5 x}$ $D_f=$ ..........................................

**292.** $f(x)=\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ..........................................

**293.** $f(x)=\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ..........................................

**294.** $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ..................................

**295.** $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ..................................

**296.** $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ............................

**297.** Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych $x$, $y$ spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

**298.** Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

**299.** Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

**300.** Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant (x-y)^2\,.$$

Dowieść, że wówczas $f$ jest funkcją stałą.

**301.** Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$

Dowieść, że $f$ jest odwrotna do samej siebie.

**302.** Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru $a$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

**303.** Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru $a$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}$$

jest odwrotna do samej siebie.

**304.** Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich $k$ i $b$, aby funkcja $f$ określona wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}$$

na przedziale $[-1/k,\,b]$ była odwrotna do samej siebie.

**305.** Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich $k$ i $b$, aby funkcja $f$ określona wzorem

$$f(x)=x+1-\sqrt{kx+1}$$

na przedziale $[-1/k,\,b]$ była odwrotna do samej siebie.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby $a$ podaj taką liczbę $b$, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej $x$ równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

**306.** $a=1$, $b=$ ...........  **307.** $a=-1$, $b=$ ...........

**308.** $a=2$, $b=$ ...........  **309.** $a=-2$, $b=$ ...........

**310.** $a=3$, $b=$ ...........  **311.** $a=-3$, $b=$ ...........

**312.** $a=3/4$, $b=$ ..........  **313.** $a=-3/4$, $b=$ ..........

**314.** $a=4/3$, $b=$ ..........  **315.** $a=-4/3$, $b=$ ..........

**316.** Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań **316.a-316.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji $f$ zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby $y$.

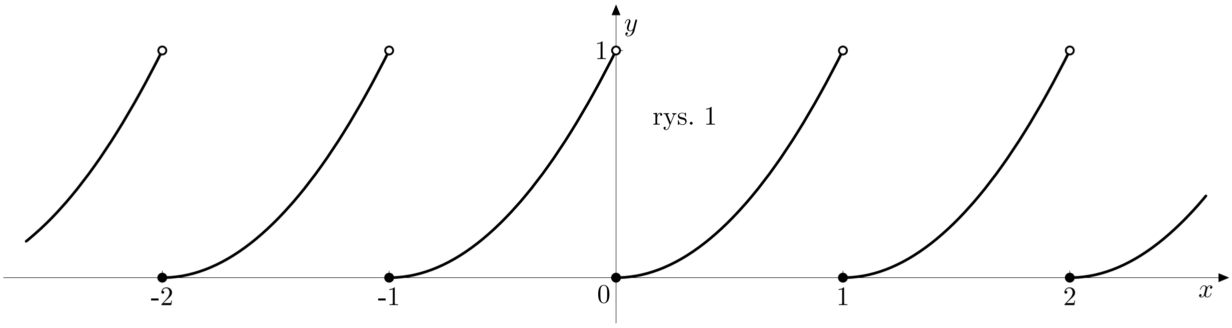
**316.a.** $f(x)=\{|x|\}$ .........  **316.b.** $f(x)=\{x\}^2$ .........

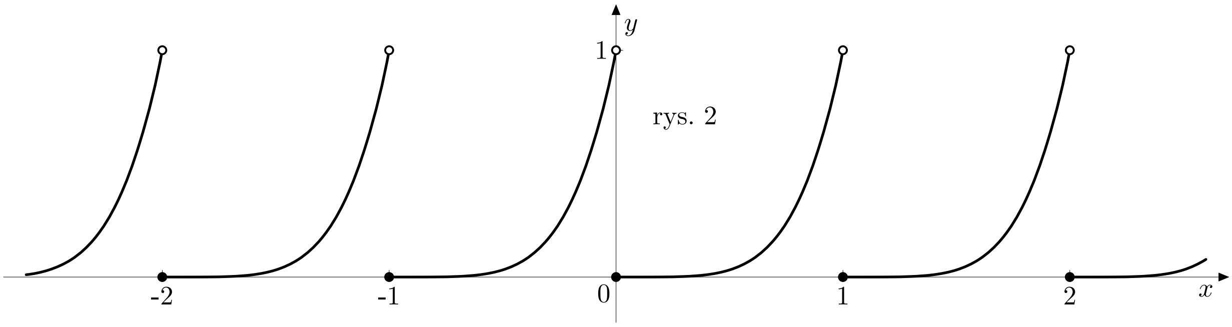
**316.c.** $f(x)=\{|x|\}^2$ ........  **316.d.** $f(x)=\sqrt{\{x\}}$ ........

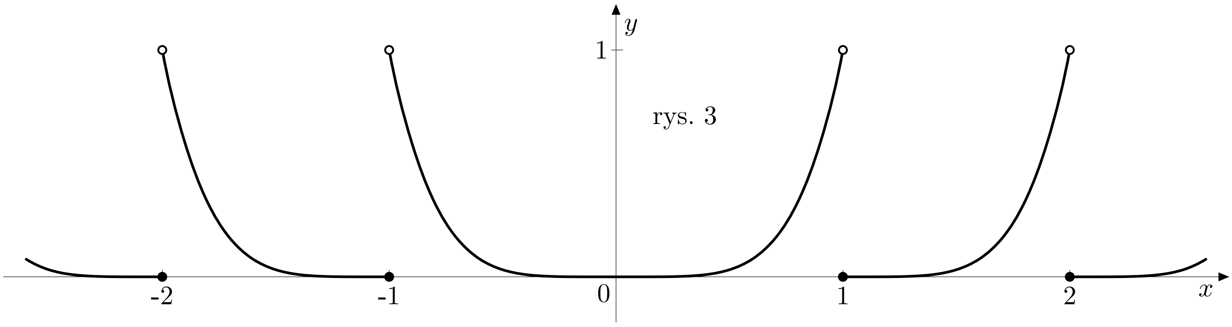
**316.e.** $f(x)=\sqrt{\{|x|\}}$ ........  **316.f.** $f(x)=\left\{\sqrt{|x|}\right\}$ ........

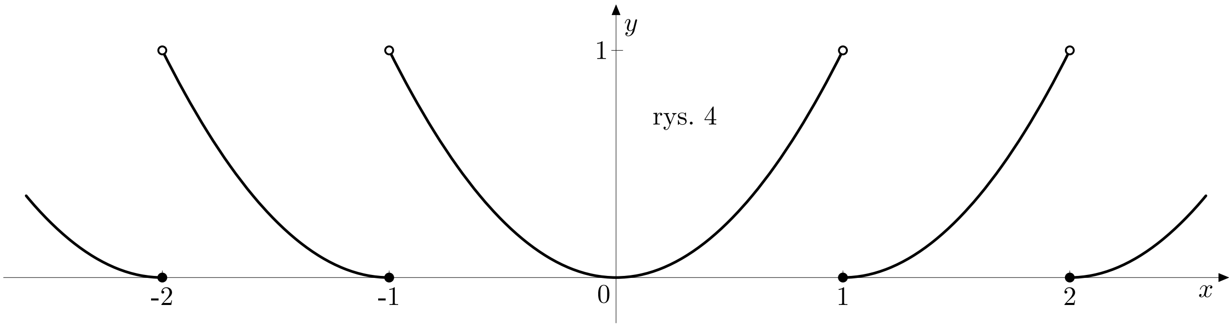
**316.g.** $f(x)=\sqrt[5]{\{x\}}$ ........  **316.h.** $f(x)=\{\sqrt[5]{x}\}$ ........

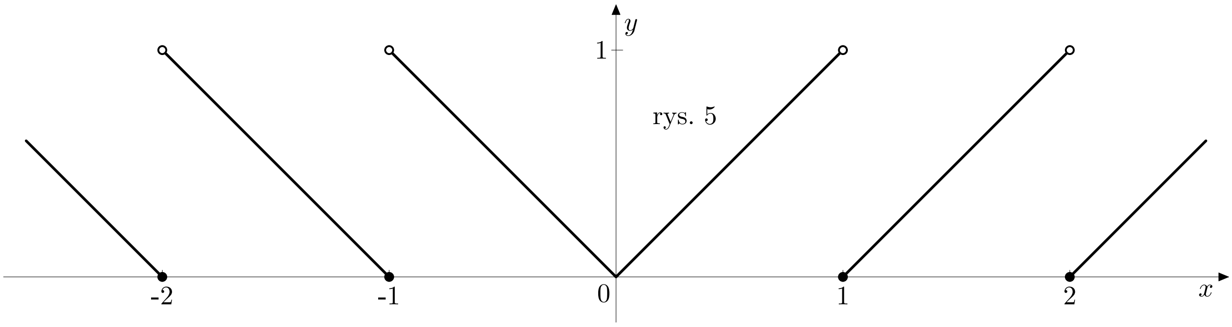
**316.i.** $f(x)=\{x\}^5$ .........  **316.j.** $f(x)=\{|x|\}^5$ .........

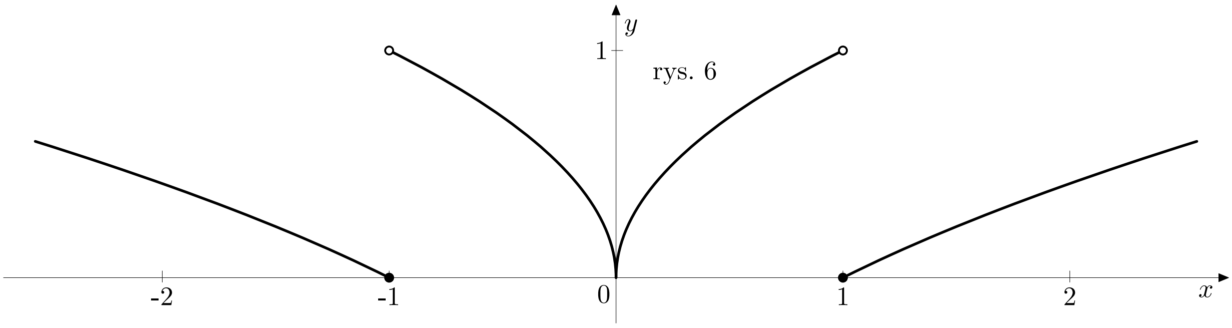

y
1
rys. 1
-2
-1
0
1
2
x

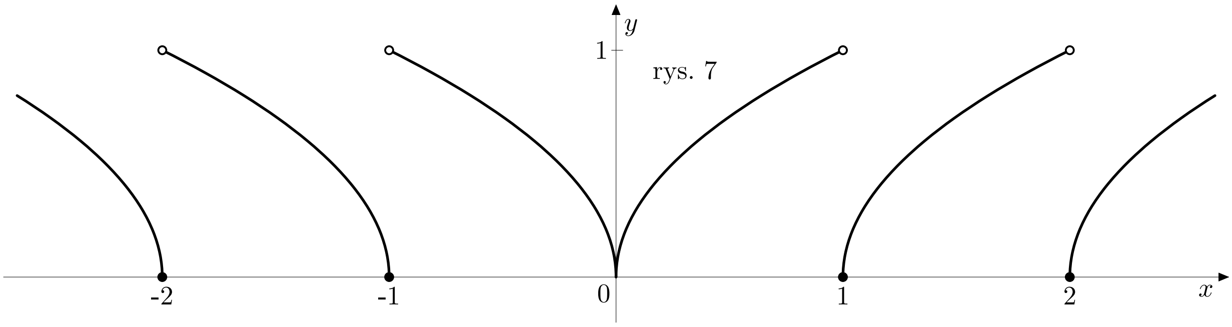

y
1
rys. 2
-2
-1
0
1
2
x

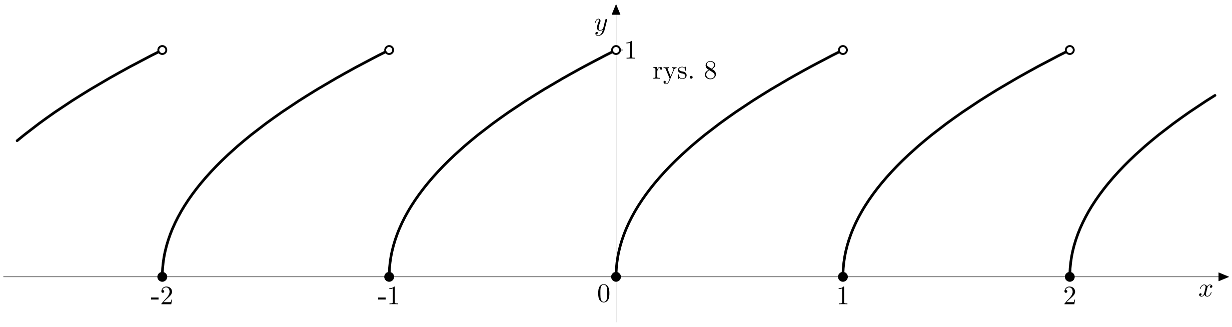

y
1
rys. 3
-2
-1
0
1
2
x

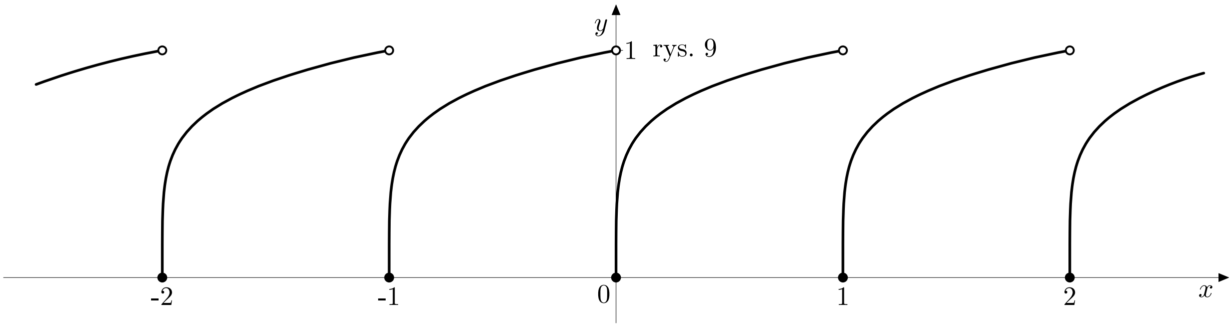

y
1
rys. 4
-2
-1
0
1
2
x

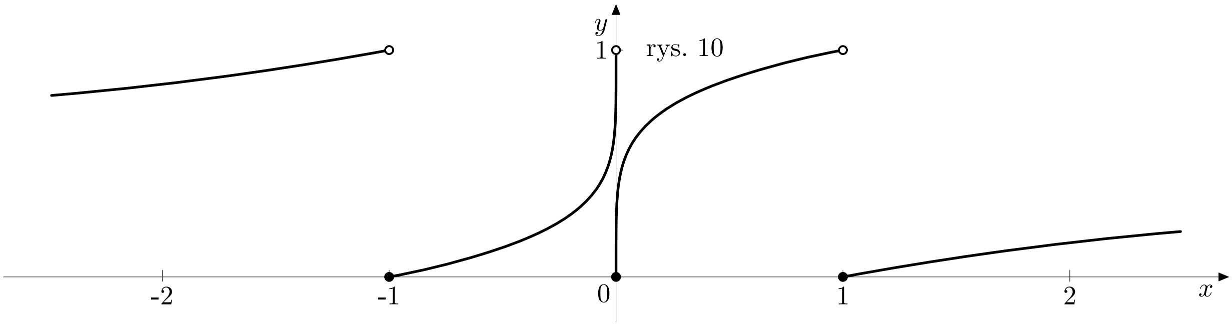

y
1
rys. 5
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 6
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 7
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 8
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 9
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 10
-2
-1
0
1
2
x