

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach  
w piątek 10.11.2023 i wtorek 14.11.2023.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!**

**5. Kresy zbiorów.**

W każdym z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$197. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$198. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$199. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$200. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$201. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$202. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 9m^2 \leq 25n^2 \right\}$$

$$203. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 2m^2 \leq 32n^2 \right\}$$

$$204. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$$

$$205. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$$

$$206. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$$

$$207. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$$

$$208. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\}$$

$$209. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\}$$

$$210. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 9^{m^2} \leq 25^{n^2} \right\}$$

$$211. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \cdot n^m \leq m^m \leq 27^n \cdot n^m \right\}$$

$$212. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{24n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{18n} \cdot n^m \right\}$$

$$213. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{160n} \cdot n^m \right\}$$

$$214. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{64n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{81n} \cdot n^m \right\}$$

215.  $Z = \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$
216.  $Z = \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^3 : n \in \mathbb{N} \right\}$
217.  $Z = \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
218.  $Z = \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$
219.  $Z = \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^{n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
220.  $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 370} : n \in \mathbb{N} \right\}$
221.  $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 390} : n \in \mathbb{N} \right\}$
222.  $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 410} : n \in \mathbb{N} \right\}$
223.  $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 430} : n \in \mathbb{N} \right\}$
224.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$
225.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$
226.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 8^m \leq 27^n \right\}$
227.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 9^m \leq 27^n \right\}$
228.  $Z = \left\{ (2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
229.  $Z = \left\{ (2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
230.  $Z = \left\{ \binom{50}{n} : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$
231.  $Z = \left\{ \binom{50}{n} \cdot (-1)^n : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$
232.  $Z = \left\{ \sqrt{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$
233.  $Z = \left\{ \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$
234.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^3 \cdot n^{15} \leq m^{15} \leq 3^5 \cdot n^{15} \right\}$
235.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^2 \cdot n^{10} \leq m^{10} \leq 2^5 \cdot n^{10} \right\}$
236.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^2 \cdot n^6 \leq m^6 \leq 2^3 \cdot n^6 \right\}$

237.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{mn} \right\}$
238.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 4^{mn} \right\}$
239.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 11^{mn} \right\}$
240.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{mn} \right\}$
241.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 3^{mn} \right\}$
242.  $Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$
243.  $Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^4 \leq m^4 \leq 49n^4 \right\}$
244.  $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{18^2 \cdot n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{2^{11} \cdot n} \cdot n^m \right\}$
245.  $Z = \{\log_x 8 : x \in [2, +\infty)\}$
246.  $Z = \{\log_x 32 : x \in (0, 1/2]\}$
247.  $Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$
248.  $Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$
249.  $Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$
250.  $Z = \left\{ \left( \frac{-1}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
251.  $Z = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\}$
252.  $Z = \left\{ x^n : x \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$
253.  $Z = \{\log_2(2n-1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$
254.  $Z = \left\{ \frac{(\log_2(n^2+1)) \cdot \log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4)) \cdot \log_9(n^2+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$
255.  $Z = \left\{ \frac{1}{5^m - 11^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
256.  $Z = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 4n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

**257.** Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 1| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **257.1-257.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

**257.1.**  $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.2.**  $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.3.**  $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.4.**  $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.5.**  $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.6.**  $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.7.**  $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.8.**  $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.9.**  $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**257.10.**  $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.** Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| a_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **258.1-258.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

**258.1.**  $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.2.**  $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.3.**  $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.4.**  $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.5.**  $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.6.**  $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.7.**  $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.8.**  $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.9.**  $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**258.10.**  $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**259.** Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych**  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}.$$

W każdym z zadań **259.1-259.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

**259.1.**  $\sup \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**259.2.**  $\inf \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**259.3.**  $\sup \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**259.4.**  $\inf \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**259.5.**  $\sup \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**259.6.**  $\inf \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**259.7.**  $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**259.8.**  $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**259.9.**  $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**259.10.**  $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**260.** W każdym z zadań **260.1-260.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

**260.1.**  $A = \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf A = \dots\dots\dots$   $\sup A = \dots\dots\dots$

**260.2.**  $B = \{a_3 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf B = \dots\dots\dots$   $\sup B = \dots\dots\dots$

**260.3.**  $C = \{a_4 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf C = \dots\dots\dots$   $\sup C = \dots\dots\dots$

**260.4.**  $D = \{a_4 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf D = \dots\dots\dots$   $\sup D = \dots\dots\dots$

**260.5.**  $E = \{(a_3 - a_1)^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf E = \dots\dots\dots$   $\sup E = \dots\dots\dots$

**260.6.**  $F = \{a_3^2 - a_1^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf F = \dots\dots\dots$   $\sup F = \dots\dots\dots$

**261.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**262.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**263.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**264.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**265.** Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{5^m - 3^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**266.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**267.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 7n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$