159. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^6+n^5+1}-n^3}{\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2} .$$

Rozwiązanie:

Ponieważ w liczniku ułamka pod znakiem granicy występuje różnica wyrażeń podobnej wielkości ($\approx n^3$), stosujemy na poziomie licznika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b} .$$

Ponieważ w mianowniku tegoż ułamka występuje różnica wyrażeń **różnego rzędu wielkości** $\left(\approx n^{3/2}\text{ oraz } \approx n^2\right)$, stosowanie jakiegokolwiek wzoru skróconego mnożenia jest zbyteczne, a nawet szkodliwe, bo prowadzi do skomplikowania rachunków.

Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^6+n^5+1}-n^3}{\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6+n^5+1-n^6}{\left(\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^6+n^5+1}+n^3\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+1}{\left(\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^6+n^5+1}+n^3\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{-5}}{\left(\sqrt[4]{n^{-2}+n^{-3}+n^{-8}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-1}+n^{-6}}+1\right)} =$$

$$= \frac{1+0}{\left(\sqrt[4]{0+0+0}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)} = -\frac{1}{2} .$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-1/2$.

160. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5} .$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{\sqrt{n^{16}+n^3}+n^8}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{16}+n^5}+n^8}{n^5}\right)^5 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-13}}+1}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-3}}\right)^5 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^3} \cdot \frac{n^{-15}}{n^{-15}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^3}=\frac{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^3}=\frac{2^5}{2^3}=4\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 4.

161. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując w mianowniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a w liczniku wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^7}{\left(n^{18}+n^7\right)^{2/3}+n^6\cdot\left(n^{18}+n^7\right)^{1/3}+n^{12}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{n^{18}+n^7}+n^9}{n^7}\right)^5=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{-5}}{\left(1+n^{-11}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-11}\right)^{1/3}+1}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-2}}\right)^5=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\left(1+n^{-11}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-11}\right)^{1/3}+1\right)^2}\cdot\frac{n^{-10}}{n^{-10}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\left(1+n^{-11}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-11}\right)^{1/3}+1\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^5}{\left((1+0)^{2/3}+(1+0)^{1/3}+1\right)^2}=\frac{2^5}{3^2}=\frac{32}{9}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32/9.

162. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^{12}+n}+n^6}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^4+n}+n^2}{n}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-3}}+1}{n^{-1}}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\frac{n^{-5}}{n^{-k}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot n^{k-5}=\frac{2^k}{2}=2^{k-1},$$

o ile $k-5=0$, czyli $k=5$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 16 dla $k=5$.

163. Wskazać liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy występujące pod znakiem granicy wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości, a następnie dzielimy licznik i mianownik przez n^9:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^9+1}{n^k\cdot\left(\sqrt{n^{14}+9n^9+1}+n^7\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9+n^{-9}}{n^{k-2}\cdot\left(\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}}+1\right)}.$$

Dla $k=2$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9+n^{-9}}{\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}}+1}=\frac{9+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{9}{2}.$$

Odpowiedź: Przy $k=2$ granica jest równa $9/2$.

Uwaga: Liczba $k=2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k, bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

164. Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{333}\cdot\left(\sqrt{1+n^{-666}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=333$. Dla $k=333$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=333$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/2$.

165. Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{666}\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 4 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=666$. Dla $k=666$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\frac{1}{4}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=666$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/4$.

166. Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\left(n^{666}+n^k\right)^{2/3}+n^{222}\cdot\left(n^{666}+n^k\right)^{1/3}+n^{444}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-444}}{\left(1+n^{k-666}\right)^{2/3}+\left(1+n^{k-666}\right)^{1/3}+1}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 3 przy n dążącym do nieskończoności (o ile $k<666$), natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=444$.

Dla $k=444$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-444}}{\left(1+n^{k-666}\right)^{2/3}+\left(1+n^{k-666}\right)^{1/3}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+n^{-222}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-222}\right)^{1/3}+1}=\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=444$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/3$.

167. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-n^2-3n\right)\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-n^2-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-\left(n^2+3n\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+6n^3-\left(n^2+3n\right)^2}{\sqrt{n^4+6n^3}+n^2+3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+6n^3-n^4-6n^3-9n^2}{\sqrt{n^4+6n^3}+n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-9n^2}{\sqrt{n^4+6n^3}+n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-9}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1+\frac{3}{n}}=-\frac{9}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-9/2$.

168. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k. Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n}{3}\right)=\mathbf{1/6}$ dla $k=\mathbf{-3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n+4}{n}\right)=\mathbf{1/24}$ dla $k=\mathbf{-4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n}{4}\right)=\mathbf{2/3}$ dla $k=\mathbf{-4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2}{5}\right)=\mathbf{4/15}$ dla $k=\mathbf{-5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2020}{6}\right)=\mathbf{4/45}$ dla $k=\mathbf{-6}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{2}\right)=\mathbf{1/8}$ dla $k=\mathbf{-4}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{2}\right)=\mathbf{2}$ dla $k=\mathbf{-4}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{3}\right)=\mathbf{1/48}$ dla $k=\mathbf{-6}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{3}\right)=\mathbf{4/3}$ dla $k=\mathbf{-6}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{3}}{2}\right)=\mathbf{1/72}$ dla $k=\mathbf{-6}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{4}\right)=\mathbf{2/3}$ dla $k=\mathbf{-8}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{4}}{3}\right)=\mathbf{4/81}$ dla $k=\mathbf{-12}$

169. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}+\frac{n}{n^3+1}+\frac{n}{n^3+2}+\frac{n}{n^3+3}+\frac{n}{n^3+4}+\frac{n}{n^3+5}+\frac{n}{n^3+6}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^3}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $3n^2+3n+2$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n\leqslant\left(3n^2+3n+2\right)\cdot\frac{n}{n^3}=c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geqslant \left(3n^2+3n+2\right)\cdot\frac{n}{(n+1)^3}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n+2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=3$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+3n+2)\cdot n}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=3\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=3\,.$$

170. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}}+\frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}}+\frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}}+\frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}}+\ldots+\frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}\right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $4n^4$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n=\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}}\,.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+0}}=\frac{4n^4\left(5n^5+4n^4\right)}{3\sqrt{2}\cdot n^9}=c_n\,.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}}\geqslant\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+0}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}=\frac{4n^4\cdot 5n^5}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{20n^9}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{20}{\sqrt{18+4n^{-14}}}=\frac{20}{\sqrt{18}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4\cdot\left(5n^5+4n^4\right)}{3\sqrt{2}\cdot n^9}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\left(5+4n^{-1}\right)}{3\sqrt{2}}=\frac{20}{3\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{10\sqrt{2}}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

171. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^7+n^4}+\frac{n^4+1}{n^7+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^7+n^4+2}+\frac{n^4+3}{n^7+n^4+3}+\frac{n^4+4}{n^7+n^4+4}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4-n^4+1=4n^3+6n^2+4n+2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego górnego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^7+n^4}+\frac{n^4+1}{n^7+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^7+n^4+2}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4}\leqslant\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{(n+1)^4}{n^7+0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^7+n^4}+\frac{n^4+1}{n^7+n^4+1}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4}\geqslant\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^7+(n+1)^4}\,.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n\to\infty$ oszacowań górnego i dolnego:

$$\frac{(4n^3+6n^2+4n+2)\cdot(n+1)^4}{n^7}=\left(4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3}\right)\cdot\left(1+n^{-1}\right)^4\to 4$$

oraz

$$\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^7+(n+1)^4}=\frac{4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3}}{1+(1+n^{-1})^4\cdot n^{-3}}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

172. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}}+\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}}+\frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że ostatni składnik danej w zadaniu sumy można zapisać jako

$$\frac{\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{\sqrt{49n^7-1}},$$

skąd wynika, że ma ona $3n^2+3n+1$ składników.

Oznaczymy sumę występującą w treści zadania przez b_n i oszacujemy ją od góry przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od góry, mianowniki od dołu) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez c_n.

$$b_n \leqslant \left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}=c_n\,.$$

Postępując analogicznie oszacujemy daną sumę od dołu przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od dołu, mianowniki od góry) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez a_n.

$$b_n \geqslant \left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}}=a_n\,.$$

Obliczając granice ciągów (a_n) i (c_n) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+n^{-3}}}{\sqrt{49+n^{-7}}}=\frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{\left(1+n^{-1}\right)^3}}{\sqrt{49-n^{-7}}}=\frac{3}{7}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{7}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{7}\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3/7.

173. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{\left(n^2+1\right)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{\left(n^2+2\right)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{\left(n^2+3\right)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{\left(n^2+4\right)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{\left(n^2+k\right)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+3)^3-n^2+1=6n+10$ wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\leqslant\sum_{k=0}^{6n+9}\frac{n^2+k}{\sqrt{\left(n^2+k\right)^3+1}}\leqslant(6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}=\left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{n}\right)^6+\frac{1}{n^6}}}\to 6$$

oraz

$$(6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}}=\left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}}\to 6\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

174. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{\left(n^2+n\right)^2}}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{\left(n^2+n\right)^2+n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{\left(n^2+n\right)^2+2n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{\left(n^2+n\right)^2+3n^2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{\left(n^2+n\right)^2+kn^2}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{\left(n^2+3n\right)^2-2n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{\left(n^2+3n\right)^2-n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{\left(n^2+3n\right)^2}}\right).$$

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{\left(n^2+3n\right)^2}}=\frac{\sqrt{n^2+8n+16}}{\sqrt{n^4+6n^3+9n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n^3+8n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{\left(n^2+n\right)^2+n^2\cdot(4n+8)}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{4n+8}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{\left(n^2+n\right)^2+kn^2}}$$

i w konsekwencji ma $4n+9$ składników. Szacujemy ją obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+8}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} \leqslant (4n+9)\cdot\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}=\frac{(4n+9)\cdot n}{n^2+3n}=\frac{4+\frac{9}{n}}{1+\frac{3}{n}}\to 4$$

oraz

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}=\frac{(4n+9)\cdot(n+4)}{n^2+n}=\frac{\left(4+\frac{9}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

175. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3}-n^2}+\ldots\right.$$

$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n}-n^2}\right)\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy wyrażenie pod znakiem granicy (uwzględniając, że jest to suma złożona z $n+1$ składników), a następnie przechodzimy z n do $+\infty$ w oszacowaniach dolnym i górnym:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^4+n^3+k-n^4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k}\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k}\geqslant(n+1)\cdot\frac{\sqrt{n^4+0+0}+n^2}{n^3+n}\to 2\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k}\leqslant(n+1)\cdot\frac{\sqrt{n^4+n^3+n}+n^2}{n^3+0}\to 2\,.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do wspólnej granicy równej 2, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i ma wartość 2.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 2.

176. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+4}+\sqrt[3]{n^2+8}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+16}+\sqrt[3]{n^2+20}+\ldots+\sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+3}+\sqrt[3]{n^2+6}+\sqrt[3]{n^2+9}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+15}+\ldots+\sqrt[3]{(n+3)^2}}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez b_n wyrażenie znajdujące się pod znakiem granicy.

Suma w liczniku tego wyrażenia zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sqrt[3]{n^2+4k}\,,$$

ma więc $n+2$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+4k=(n+2)^2=n^2+4n+4=n^2+4(n+1)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Podobnie, suma w mianowniku wyrażenia b_n zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{2n+3}\sqrt[3]{n^2+3k}\,,$$

ma więc $2n+4$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+3k=(n+3)^2=n^2+6n+9=n^2+3(2n+3)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Szacowanie od góry daje

$$b_n\leqslant\frac{(n+2)\cdot\sqrt[3]{(n+2)^2}}{(2n+4)\cdot\sqrt[3]{n^2}}=\frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2\cdot\sqrt[3]{n^2}}=c_n\,.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$b_n\geqslant\frac{(n+2)\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(2n+4)\cdot\sqrt[3]{(n+3)^2}}=\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2\cdot\sqrt[3]{(n+3)^2}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2\cdot\sqrt[3]{(n+3)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2\cdot\sqrt[3]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}}{2}=\frac{1}{2}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 1/2.

177. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^7+9}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^7+16}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+5}}{n^7+25}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^3 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^7+n^6}\leqslant\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\leqslant n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^7+n^6}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k}}{n^4+n^3}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2}}{n^4+n^3}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2-4}}{1+\frac{1}{n}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k/2-4=0$, czyli $k=8$.

$$n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7}=\sqrt{k\cdot n^{k/2-4}+\frac{1}{n^5}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k/2-4=0$, czyli $k=8$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=8$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

178. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p+1}{\sqrt{900n^{900}+1}}+\frac{n^p+8}{\sqrt{900n^{900}+32}}+\ldots+\frac{n^p+k^3}{\sqrt{900n^{900}+k^5}}+\ldots+\frac{n^p+8n^{18}}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $2n^6$ składników. Szacujemy ją obustronnie:

$$2n^6\cdot\frac{n^p+0}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}\leqslant\sum_{k=1}^{2n^6}\frac{n^p+k^3}{\sqrt{900n^{900}+k^5}}\leqslant 2n^6\cdot\frac{n^p+8n^{18}}{\sqrt{900n^{900}+0}}=2n^6\cdot\frac{n^p+8n^{18}}{30n^{450}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$2n^6\cdot\frac{n^p+0}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}=\frac{2n^{p+6}}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}=\frac{2n^{p-444}}{\sqrt{900+32n^{-870}}}\to\frac{2\cdot 1}{\sqrt{900+0}}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15},$$

o ile $p-444=0$, czyli $p=444$.

$$2n^6\cdot\frac{n^p+8n^{18}}{30n^{450}}=\frac{2n^{p+6}+16n^{24}}{30n^{450}}=\frac{2n^{p-444}+16n^{-426}}{30}\to\frac{2\cdot 1+0}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15},$$

o ile $p-444=0$, czyli $p=444$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $p=444$ dana w zadaniu granica jest równa $1/15$.

179. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+9}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+16}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^4 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}\leqslant\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\leqslant n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3-9}}{1+\frac{1}{n^5}}\to\sqrt[3]{k},$$

o ile $k/3-9=0$, czyli $k=27$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^9}=\sqrt[3]{k\cdot n^{k-27}+\frac{1}{n^{23}}}\to\sqrt[3]{k},$$

o ile $k-27=0$, czyli $k=27$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=27$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 3.

180. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+3}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^5 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^5}\leqslant\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\leqslant n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^5}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k}}{n^8+1}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2}}{n^8+1}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2-8}}{1+\frac{1}{n^8}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k/2-8=0$, czyli $k=16$.

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+0}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^8}=\sqrt{k\cdot n^{k-16}+\frac{1}{n^{11}}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k-16=0$, czyli $k=16$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=16$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

181. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^k+n^4+2}+\frac{n^4+3}{n^k+n^4+3}+\frac{n^4+4}{n^k+n^4+4}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4-n^4+1=4n^3+6n^2+4n+2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego gornego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^k+n^4+2}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\leqslant\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{(n+1)^4}{n^k+0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\geqslant\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^k+(n+1)^4}\,.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n\to\infty$ oszacowań górnego i dolnego.

$$\frac{(4n^3+6n^2+4n+2)\cdot(n+1)^4}{n^k}=\frac{(4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3})\cdot\left(1+n^{-1}\right)^4}{n^{k-7}}\to 4\,,$$

o ile $k=7$.

$$\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^k+(n+1)^4}=\frac{4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3}}{n^{k-7}+\left(1+n^{-1}\right)^4\cdot n^{-3}}\to 4\,,$$

o ile $k=7$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=7$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

182. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{\sqrt{n^p+k}}{n^7+k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona n^3-n^2+1 składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n\leqslant\left(n^3-n^2+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^p+n^3}}{n^7+n^4}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^{p-8}+\frac{1}{n^5}}}{1+\frac{1}{n^3}}=c_n$$

oraz od dołu

$$b_n\geqslant\left(n^3-n^2+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^p+n^2}}{n^7+n^6}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^{p-8}+\frac{1}{n^6}}}{1+\frac{1}{n}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto dla $p=8$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1\,.$$

Odpowiedź: Dla $p=8$ wartość granicy jest równa 1.

183. a) Dobrać takie liczby całkowite $A>0$ i $B>1$, aby zadanie **b)** miało sens.
b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+3\cdot\frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2n+1+2\cdot\frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}\,, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{3}=\frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}\,, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2\cdot\left(2An+A^2\right)=3\cdot\left(2(B-1)n+B^2-1\right)\,,$$
$$4An+2A^2=6(B-1)n+3\left(B^2-1\right)\,. \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 6(B-1)\\ 2A^2 &= 3\left(B^2-1\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A &= 3(B-1)\\ 2A^2 &= 3(B-1)(B+1)\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $A=B+1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B+2=3B-3\,,$$

skąd $B=5$ i $A=6$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=4n+12\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n+13$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+12}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} \leqslant (4n+13)\cdot\frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2}=\frac{(4n+13)\cdot n}{(n+5)^2}=\frac{4+\frac{13}{n}}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}\to 4$$

oraz

$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2}=\frac{(4n+13)\cdot(n+6)}{(n+1)^2}=\frac{\left(4+\frac{13}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{6}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=6$, $B=5$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

184. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>3$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+6n+9+2(B-3)n+B^2-9}=$$
$$=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{(n+3)^2+2\cdot\left((B-3)n+\frac{B^2-9}{2}\right)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}\,, \tag{4}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{5}=(B-3)n+\frac{B^2-9}{2}\,, \tag{5}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (5) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (5) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2\cdot\left(2An+A^2\right)=5\cdot\left(2(B-3)n+B^2-9\right)\,,$$

$$4An+2A^2=10(B-3)n+5\left(B^2-9\right)\,. \tag{6}$$

Aby równość (6) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 10(B-3) \\ 2A^2 &= 5\,(B^2-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A &= 5(B-3) \\ 2A^2 &= 5\,(B-3)\,(B+3) \end{cases} \tag{7}$$

Dzieląc drugie równanie układu (7) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A>0$ i $B>3$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A=B+3$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B+6=5B-15\,,$$

skąd $B=7$ i $A=10$. Wstawiając te wartości do równości (5) otrzymujemy

$$N(n)=4n+20\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n+21$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (4) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+21} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} \leqslant (4n+21)\cdot\frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2}=\frac{(4n+21)\cdot n}{(n+7)^2}=\frac{4+\frac{21}{n}}{\left(1+\frac{7}{n}\right)^2}\to 4$$

oraz

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(4n+21)\cdot(n+10)}{(n+3)^2}=\frac{\left(4+\frac{21}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{10}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=10$, $B=7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

185. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B<6$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+12n+36}=\frac{\sqrt{n^2+3\cdot\frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2Bn+B^2+(2(6-B)n+36-B^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}\,, \tag{8}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{3}=2(6-B)n+36-B^2\,, \tag{9}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (9) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (9) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2An+A^2=3\cdot\left(2(6-B)n+36-B^2\right)\,,$$
$$2An+A^2=6(6-B)n+3\left(36-B^2\right)\,. \tag{10}$$

Aby równość (10) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A &= 6(6-B)\\ A^2 &= 3(36-B^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A &= 3(6-B)\\ A^2 &= 3(6-B)(6+B)\end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze[1] otrzymujemy $A=6+B$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$6+B=18-3B\,,$$

[1]Z warunków podanych w treści zadania $A>0$ i $B<6$, skąd wynika, że obie strony pierwszego równania są dodatnie, a więc niezerowe.

skąd $B=3$ i $A=9$. Wstawiając te wartości do równości (9) otrzymujemy

$$N(n)=6n+27\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $6n+28$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (8) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2}\leqslant\sum_{k=0}^{6n+27}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+3)^2+k}\leqslant(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2}=\frac{(6n+28)\cdot n}{(n+6)^2}=\frac{6+\frac{28}{n}}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^2}\to 6$$

oraz

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(6n+28)\cdot(n+9)}{(n+3)^2}=\frac{\left(6+\frac{28}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 6\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=9$, $B=3$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 6.

186. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2}}+\frac{n^2+5}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2}}+\frac{n^2+10}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+4}}+\frac{n^2+15}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+6}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+5k}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2k}}+\ldots+\frac{(n+10)^2-10}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-4}}+\frac{(n+10)^2-5}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-2}}+\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2}}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A<B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2}}=\frac{n^2+20n+100}{n^2\cdot\sqrt{n^2+2Bn+B^2}}=\frac{n^2+5\cdot(4n+20)}{n^2\cdot\sqrt{n^2+2An+A^2+2(B-A)n+B^2-A^2}}=$$
$$=\frac{n^2+5\cdot(4n+20)}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2\cdot\left((B-A)n+\frac{B^2-A^2}{2}\right)}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{n^2+5k}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2k}}\,,\qquad(11)$$

gdzie

$$N(n)=4n+20=(B-A)n+\frac{B^2-A^2}{2}\,, \tag{12}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=4n+21$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (12) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (12) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$4n+20=(B-A)n+\frac{B^2-A^2}{2}\,,$$

$$8n+40=2(B-A)n+B^2-A^2\,. \tag{13}$$

Aby równość (13) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 8 & = & 2(B-A) \\ 40 & = & B^2-A^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4 & = & B-A \\ 40 & = & (B-A)(B+A) \end{array}\right. \tag{14}$$

Dzieląc drugie równanie układu (14) przez pierwsze (w którym zgodnie z założoną nierównością $A<B$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy

$$10=B+A\,,$$

skąd $A=3$ i $B=7$.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (11) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+21)\cdot\frac{n^2}{n^2\cdot(n+7)} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+20}\frac{n^2+5k}{n^2\cdot\sqrt{(n+3)^2+2k}} \leqslant (4n+21)\cdot\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot(n+3)}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+21)\cdot\frac{n^2}{n^2\cdot(n+7)}=\frac{4+\frac{21}{n}}{1+\frac{7}{n}}\to 4$$

oraz

$$(4n+21)\cdot\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot(n+3)}=\frac{\left(4+\frac{21}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{10}{n}\right)^2}{1+\frac{3}{n}}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=3$, $B=7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

187. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+2n+1+2(B-1)n+B^2-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{(n+1)^2+3\cdot\frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}, \tag{15}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{5}=\frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}, \tag{16}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (16) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (16) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$3\cdot\left(2An+A^2\right)=5\cdot\left(2(B-1)n+B^2-1\right),$$

$$6An+3A^2=10(B-1)n+5\left(B^2-1\right). \tag{17}$$

Aby równość (17) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 6A &= 10(B-1)\\ 3A^2 &= 5\left(B^2-1\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 3A &= 5(B-1)\\ 3A^2 &= 5(B-1)(B+1)\end{cases} \tag{18}$$

Dzieląc drugie równanie układu (18) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A>0$ i $B>1$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A=B+1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$3B+3=5B-5,$$

skąd $B=4$ i $A=5$. Wstawiając te wartości do równości (16) otrzymujemy

$$N(n)=2n+5.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $2n+6$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (15) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+6)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+5}\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} \leqslant (2n+6)\cdot\frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+6)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2}=\frac{(2n+6)\cdot n}{(n+4)^2}=\frac{2+\frac{6}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}\to 2$$

oraz

$$(2n+6)\cdot\frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2}=\frac{(2n+6)\cdot(n+5)}{(n+1)^2}=\frac{\left(2+\frac{6}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\to 2\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=5$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

188. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>2$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot\frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+4n+4+2(B-2)n+B^2-4}=$$
$$=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot\frac{2An+A^2}{2}}}{(n+2)^2+2(B-2)n+B^2-4},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}, \tag{19}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{2}=2(B-2)n+B^2-4\,, \tag{20}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (20) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (20) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2An+A^2=2\cdot\left(2(B-2)n+B^2-4\right),$$

$$2An+A^2=4(B-2)n+2B^2-8\,. \tag{21}$$

Aby równość (21) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A &= 4(B-2) \\ A^2 &= 2B^2-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A &= 2(B-2) \\ A^2 &= 2(B-2)(B+2) \end{cases} \tag{22}$$

Dzieląc drugie równanie układu (22) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A>0$ i $B>2$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A=B+2$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$B+2=2B-4\,,$$

skąd $B=6$ i $A=8$. Wstawiając te wartości do równości (20) otrzymujemy

$$N(n)=8n+32\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $8n+33$ składniki.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (19) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{8n+32}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} \leqslant (8n+33)\cdot\frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2}=\frac{(8n+33)\cdot n}{(n+6)^2}=\frac{8+\frac{33}{n}}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^2}\to 8$$

oraz

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2}=\frac{(8n+33)\cdot(n+8)}{(n+2)^2}=\frac{\left(8+\frac{33}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{8}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\to 8\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 8.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=8$, $B=6$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 8.

189. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2}+\frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A<B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+14n+49}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+7\cdot(2n+7)}}{n^2+2An+A^2+(2(B-A)n+B^2-A^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}, \tag{23}$$

gdzie

$$N(n)=2n+7=2(B-A)n+B^2-A^2, \tag{24}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=2n+8$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (24) muszą być równe.

Aby prawa równość (24) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases}2 = 2\cdot(B-A)\\ 7 = B^2-A^2\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}1 = B-A\\ 7 = (B-A)\cdot(B+A)\end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $7=A+B$, co prowadzi do $A=3$ i $B=4$.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (23) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2}\leqslant\sum_{k=0}^{2n+7}\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+3)^2+k}\leqslant(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2}=\frac{(2n+8)\cdot n}{(n+4)^2}=\frac{2+\frac{8}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}\to 2$$

oraz

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(2n+8)\cdot(n+7)}{(n+3)^2}=\frac{\left(2+\frac{8}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 2.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=3$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

190. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 9 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+n}}=$$
$$=\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n}{\sqrt{n^4+n}}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n\geqslant\frac{n}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+9n}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}=$$
$$=\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n}{\sqrt{n^4+9n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n=(8n+1)\cdot\frac{n+9n}{2}=5n\cdot(8n+1)\,,$$

gdzie $8n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}\to 40$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+9n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{9}{n^3}}}\to 40\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 40$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 40\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 40\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 40.

191. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n+3}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n+6}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n+9}}+\frac{4n+12}{\sqrt{4n^4+4n+12}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{13n-9}{\sqrt{4n^4+13n-9}}+\frac{13n-6}{\sqrt{4n^4+13n-6}}+\frac{13n-3}{\sqrt{4n^4+13n-3}}+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 13/4 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leqslant \frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n}}+\ldots+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+4n}}=$$
$$=\frac{4n+(4n+3)+(4n+6)+(4n+9)+\ldots+13n}{\sqrt{4n^4+4n}}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geqslant \frac{4n}{\sqrt{4n^4+13n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+13n}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+13n}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+13n}}+\ldots+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}}=$$
$$=\frac{4n+(4n+3)+(4n+6)+(4n+9)+\ldots+13n}{\sqrt{4n^4+13n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n+(4n+3)+(4n+6)+(4n+9)+\ldots+13n=(3n+1)\cdot\frac{4n+13n}{2}=\frac{17n\cdot(3n+1)}{2},$$

gdzie

$$3n+1=\frac{13n-4n}{3}+1$$

jest liczbą wyrazów powyższego postępu (o różnicy 3).

Wobec tego

$$c_n=\frac{17n\cdot(3n+1)}{2\cdot\sqrt{4n^4+4n}}=\frac{17\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}{2\cdot\sqrt{4+\frac{4}{n^3}}}\to\frac{51}{4}$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{17n\cdot(3n+1)}{2\cdot\sqrt{4n^4+13n}}=\frac{17\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}{2\cdot\sqrt{4+\frac{13}{n^3}}}\to\frac{51}{4}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{51}{4}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{51}{4},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{51}{4}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 51/4.

192. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n+1}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+4}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+8}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^{n-2}}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^{n-1}}+\frac{2^n}{3^n+2^n}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 0 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp geometryczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leqslant \frac{3^n}{3^n}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}=$$

$$=\frac{3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n}{3^n}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geqslant \frac{3^n}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+2^n}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^n}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^n}+\frac{2^n}{3^n+2^n}=$$

$$=\frac{3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n}{3^n+2^n}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy

$$3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n=$$

$$=3^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}=3^{n+1}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=3^{n+1}-2^{n+1}\,,$$

gdyż iloraz powyższego postępu jest równy $2/3$, a $n+1$ jest liczbą wyrazów postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 3-2\cdot 0=3$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}=\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\to\frac{3-2\cdot 0}{1+0}=3\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=3$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=3\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3.

193. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników) będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki oszacujemy przez wspólną wielkość, a liczniki, które tworzą postęp geometryczny, pozostawimy bez zmian.

Szacowanie od dołu (mianowniki od góry) prowadzi do:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry (mianowniki od dołu) otrzymujemy:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+0}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{3^n}=c_n\,.$$

W licznikach uzyskanych oszacowań występuje suma tego samego postępu geometrycznego $n+1$-wyrazowego o pierwszym wyrazie 2^n i ilorazie $3/2$. Mamy więc

$$2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n=2^n\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}=3^{n+1}-2^{n+1}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{\sqrt{9^n+7^n}}=\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{9}\right)^n}}\to 3$$

oraz

$$c_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 3\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 3.

194. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}}+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}}+\ldots+\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}}+\frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do czterech przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna szacując mianowniki przez wspólną wielkość.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+n}}=\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+0}}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=c_n\,.$$

Obliczamy sumę występującą we wzorach na a_n i c_n:

$$\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=\sum_{k=n+1}^{2n}k^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{6}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(7n+1)}{6}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(7n+1)}{6\cdot\sqrt{n^6+n}}\to\frac{7}{3}$$

oraz

$$c_n=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(7n+1)}{6\cdot n^3}\to\frac{7}{3}\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa **7/3**.

195. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – ilorazy środkowych składników do skrajnych dążą do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak n-ty wiersz trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n\leqslant\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+0}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+0}}=$$
$$=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}{2^n}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n\geqslant\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}=$$
$$=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę wyrazów n-tego wiersza trójkąta Pascala otrzymujemy

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{2^n}{2^n}=1\to 1$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{2^n}{\sqrt{4^n+3^n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}}\to 1\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto
$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$
oraz
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,,$$
na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 1.

196. Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\right)$$
dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy przy $k\geqslant 2$ mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak początek siódmej kolumny trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do
$$b_n=\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+0}}=$$
$$=\frac{\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}}{n^{k/2}}=c_n$$
Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do
$$b_n=\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów kolumny trójkąta Pascala[2] otrzymujemy

$$\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}=\binom{n+1}{8}.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{\binom{n+1}{8}}{n^{k/2}}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-6)/8!}{n^{k/2}}\to\frac{1}{8!}$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=16$. Podobnie

$$a_n=\frac{\binom{n+1}{8}}{\sqrt{n^k+n}}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-6)/8!}{n^{k/2}\cdot\sqrt{1+n^{1-k}}}\to\frac{1}{8!}$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=16$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n=1/8!$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1/8!\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n=1/8!\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma dla $k=16$ wartość $1/8!=1/40320$.

[2]Wzór ten mówi, że

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

i może być udowodniony indukcyjnie ze względu na n. Można też zapisać

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}=\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}$$

i wielokrotnie zastosować do początkowych składników wzór $\binom{a}{b}+\binom{a}{b+1}=\binom{a+1}{b+1}$.