

**Kolokwium nr 2:** środa 8.11.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 1–196.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach**  
we wtorek 31.10.2023, piątek 3.11.2023 i wtorek 7.11.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

W pierwszej kolejności należy omówić zadania z wykrzyknikiem.

#### 4. Ciągi liczbowe, granica.

**159!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2}.$$

**160.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8)^3}{(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8)^5}.$$

**161.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^{18} + n^7} - n^6)^2}{(\sqrt{n^{18} + n^7} - n^9)^5}.$$

**162!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12} + n} - n^6}{(\sqrt{n^4 + n} - n^2)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

**163!** Wskazać liczbę naturalną  $k$ , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie  $k$ .

**164.** Wskazać liczbę rzeczywistą  $k$ , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot (\sqrt{n^{666} + 1} - n^{333}) \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie  $k$ .

**165.** Wskazać liczbę rzeczywistą  $k$ , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot (\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222}) \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie  $k$ .

**166!** Wskazać liczbę rzeczywistą  $k$ , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222} \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie  $k$ .

**167!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n \right).$$

**168!** Wskaż liczbę rzeczywistą  $k$ , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru  $k$ . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{n}{3} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{n+4}{n} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{2n}{4} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{2n+2}{5} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{2n+2020}{6} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{2} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{3} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{3} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{\binom{n}{3}}{2} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{4} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k \cdot \binom{\binom{2n}{4}}{3} \right) = \dots$  dla  $k = \dots$

**169.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + \frac{n}{n^3+4} + \frac{n}{n^3+5} + \frac{n}{n^3+6} + \dots + \frac{n}{(n+1)^3} \right).$$

**170.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}} + \frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}} + \frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}} + \frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}} + \dots + \frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}} \right).$$

**171!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4}{n^7+n^4} + \frac{n^4+1}{n^7+n^4+1} + \frac{n^4+2}{n^7+n^4+2} + \frac{n^4+3}{n^7+n^4+3} + \frac{n^4+4}{n^7+n^4+4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4} \right).$$

**172!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}} + \frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}} + \frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}} + \dots + \frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} \right).$$

**173.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}} + \frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}} + \frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}} + \frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} + \dots + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \right).$$

**174.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \right).$$

**175!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3-n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k-n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-n^2}} \right).$$

**176!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+4} + \sqrt[3]{n^2+8} + \sqrt[3]{n^2+12} + \sqrt[3]{n^2+16} + \sqrt[3]{n^2+20} + \dots + \sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+3} + \sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{n^2+9} + \sqrt[3]{n^2+12} + \sqrt[3]{n^2+15} + \dots + \sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

**177!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 5}}{n^7 + 25} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru  $k$ , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

**178!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^p + 1}{\sqrt{900n^{900} + 1}} + \frac{n^p + 8}{\sqrt{900n^{900} + 32}} + \dots + \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} + \dots + \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru  $p$ , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

**179.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 4} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 9} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 16} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13} + n^8} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru  $k$ , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

**180.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 2} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 3} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13} + n^5} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru  $k$ , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

**181!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^k + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^k + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru  $k$ , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

**182!** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{\sqrt{n^p + k}}{n^7 + k^2}$$

dobierając tak wartość parametru  $p$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

**183! a)** Dobrać takie liczby całkowite  $A > 0$  i  $B > 1$ , aby zadanie **b)** miało sens.

**b)** Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla  $A$  i  $B$  dobranych w zadaniu **a)**.

**184.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A > 0$  i  $B > 3$ , aby zadanie miało sens.

**185!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A > 0$  i  $B < 6$ , aby zadanie miało sens.

**186!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2}} + \frac{n^2+5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2}} + \frac{n^2+10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+4}} + \frac{n^2+15}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+6}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2k}} + \dots + \frac{(n+10)^2-10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-4}} + \frac{(n+10)^2-5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-2}} + \frac{(n+10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2}} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich  $A < B$ , aby zadanie miało sens.

**187.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A > 0$  i  $B > 1$ , aby zadanie miało sens.

**188.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A > 0$  i  $B > 2$ , aby zadanie miało sens.

**189.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych  $A < B$ , aby zadanie miało sens.

**190!** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}} + \frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}} + \dots + \frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}} \right).$$

**191!** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}} + \frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n+3}} + \frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n+6}} + \frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n+9}} + \frac{4n+12}{\sqrt{4n^4+4n+12}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{13n-9}{\sqrt{4n^4+13n-9}} + \frac{13n-6}{\sqrt{4n^4+13n-6}} + \frac{13n-3}{\sqrt{4n^4+13n-3}} + \frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}} \right).$$

**192!** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n}{3^n+1} + \frac{3^{n-1} \cdot 2}{3^n+2} + \frac{3^{n-2} \cdot 4}{3^n+4} + \frac{3^{n-3} \cdot 8}{3^n+8} + \dots + \frac{9 \cdot 2^{n-2}}{3^n+2^{n-2}} + \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{3^n+2^{n-1}} + \frac{2^n}{3^n+2^n} \right).$$

**193!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}} + \frac{2^{n-1} \cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1} \cdot 7}} + \frac{2^{n-2} \cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2} \cdot 7^2}} + \dots + \frac{2^{n-k} \cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k} \cdot 7^k}} + \dots + \frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}} \right).$$

**194!** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}} + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}} + \dots + \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}} + \frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}} \right).$$

Wskazówka-przypomnienie:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ .

**195!** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}} \right).$$

**196!** Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}} + \frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}} + \frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}} + \frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}} + \dots + \frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}} + \frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}} \right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru  $k$ , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.