107. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017} > \left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} > x^{2015}$ dla $x > 1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{17}} > 7-\sqrt{25} = 7-5 = 2 > \mathbf{1}\,.$$

108. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017} < \left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} < x^{2015}$ dla $0 < x < 1$ oraz z oszacowań

$$\mathbf{0} = 7-7 = 7-\sqrt{49} < \mathbf{7-\sqrt{37}} < 7-\sqrt{36} = 7-6 = \mathbf{1}\,.$$

109. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017} > \left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} > x^{2015}$ dla $-1 < x < 0$ oraz z oszacowań

$$-\mathbf{1} = 7-8 = 7-\sqrt{64} < \mathbf{7-\sqrt{57}} < 7-\sqrt{49} = 7-7 = \mathbf{0}\,.$$

110. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017} < \left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$.

Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017} < x^{2015}$ dla $x < -1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{77}} < 7-\sqrt{64} = 7-8 = -\mathbf{1}\,.$$

111. Która liczba jest większa: $2^{2^{2^{11}}}$ czy $1000^{2^{2^{10}}}$?

Odpowiedź: $2^{2^{2^{11}}} > 1000^{2^{2^{10}}}$.

Korzystając z własności potęgowania otrzymujemy

$$2^{2^{2^{11}}} = 2^{2^{2^{10}+2^{10}}} = 2^{2^{2^{10}}\cdot 2^{2^{10}}} = \left(2^{2^{2^{10}}}\right)^{2^{2^{10}}} > 1000^{2^{2^{10}}}\,.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności

$$2^{2^{2^{10}}} = 2^{2^{1024}} > 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{10} = 1024 > 1000\,.$$

112. Która liczba jest większa: $a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}}$ czy 10^{10} ?

Liczba $a = \sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Rozwiązanie:

Z równości $a^{16}=16$ wynika, że pierwsza liczba jest równa 16, jest więc mniejsza.

113. Która liczba jest większa: $\log_a b$ czy $\log_b a$?
Przyjmujemy $a=\log_2 3$ oraz $b=\log_3 2$.

Rozwiązanie:
Ponieważ $ab=1$, mamy $\log_a b=\log_b a=-1$.

114. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej.

$$A=10^{10^{11}},\quad B=10^{10^{20}},\quad C=10^{10^{50}},\quad D=10^{10^{250}},\quad E=(10!)^{10!}$$
$$F=(100!)^{10^{10}},\quad G=2^{100!},\quad H=2^{2^{100}},\quad I=10^{10^{10^3}},\quad J=2^{2^{2^{10}}}$$

Rozwiązanie:
Poprawny porządek jest następujący

$$E<A<F<B<H<C<G<D<J<I$$

Szacowania dowodzące poprawności powyższego uporządkowania:

$$E=(10!)^{10!}<\left(10^{10}\right)^{10^{10}}=10^{10^{11}}=A$$
$$A=10^{10^{11}}=\left(10^{10}\right)^{10^{10}}<\left(10^{90}\right)^{10^{10}}<(100!)^{10^{10}}=F$$
$$F=(100!)^{10^{10}}<\left(10^{200}\right)^{10^{10}}<\left(10^{1000}\right)^{10^{10}}=10^{10^{13}}<B$$
$$B<10^{10^{29}}<16^{10^{30}/4}=2^{10^{30}}=2^{1000^{10}}<2^{1024^{10}}=2^{2^{100}}=H$$
$$H=2^{2^{100}}<2^{2^{120}}=2^{8^{40}}<10^{10^{40}}<C$$
$$C<10^{10^{90}}<16^{100!/4}=2^{100!}=G$$
$$G=2^{100!}<10^{10^{200}}<D$$
$$D<10^{10^{299}}<16^{10^{300}/4}=2^{10^{300}}=2^{1000^{100}}<2^{1024^{100}}<2^{2^{1000}}<2^{2^{2^{10}}}=J$$
$$J=2^{2^{2^{10}}}=2^{2^{1024}}=2^{4^{512}}<10^{10^{512}}<10^{10^{1000}}=I$$

115. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówności
$$n^{2^{120}}<2^n<n^{2^{122}}\,.$$

Rozwiązanie:
Przyjęcie $n=2^m$ pozwala na przepisanie podanej nierówności w postaci równoważnej:
$$2^{m\cdot 2^{120}}<2^{2^m}<2^{m\cdot 2^{122}}\,,$$

czyli

$$m\cdot 2^{120}<2^m<m\cdot 2^{122}.$$

Z kolei podstawienie $m=2^k$ prowadzi do

$$2^{k+120}<2^{2^k}<2^{k+122},$$

czyli

$$k+120<2^k<k+122.$$

Zauważając, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=7$, otrzymujemy $m=2^7=128$ i w konsekwencji $n=\mathbf{2^{128}}$.

116. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}}<2^n<n^{2^{2018}}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przyjmijmy $n=2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{k\cdot 2^{2017}}<2^{2^k}<2^{k\cdot 2^{2018}},$$

czyli

$$k\cdot 2^{2017}<2^k<k\cdot 2^{2018}.$$

Zauważmy, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=2028$, gdyż wtedy

$$k\cdot 2^{2017}=2028\cdot 2^{2017}<2048\cdot 2^{2017}=2^{11}\cdot 2^{2017}=2^{2028}=2^k$$

oraz

$$2^k=2^{2028}=2^{10}\cdot 2^{2018}=1024\cdot 2^{2018}<2028\cdot 2^{2018}=k\cdot 2^{2018}.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=2^{2028}$.

Sposób II

Przyjmijmy $n=k\cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<2^{k\cdot 2^{2017}}<\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2018}},$$

czyli

$$\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<\left(2^k\right)^{2^{2017}}<\left(k^2\cdot 2^{4034}\right)^{2^{2017}},$$

co jest równoważne nierównościom

$$k\cdot 2^{2017}<2^k<k^2\cdot 2^{4034} \qquad (\heartsuit).$$

Zauważmy, że nierówności $(\heartsuit)$ są prawdziwe dla $k=2028$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{2017}=2028\cdot 2^{2017}<2048\cdot 2^{2017}=2^{11}\cdot 2^{2017}=2^{2028}=2^k$$

oraz

$$2^k=2^{2028}=2^{20}\cdot 2^{2008}=1024^2\cdot 2^{2008}<2028^2\cdot 2^{2008}=k^2\cdot 2^{2008}<k^2\cdot 2^{4034}.$$

Ale nierówności ($\heartsuit$) są też prawdziwe dla $k=4056$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{2017}=4056\cdot 2^{2017}<4096\cdot 2^{2017}=2^{12}\cdot 2^{2017}=2^{2029}<2^{4056}=2^k$$

oraz

$$2^k=2^{4056}=2^{22}\cdot 2^{4034}=2048^2\cdot 2^{4034}<4056^2\cdot 2^{4034}=k^2\cdot 2^{4034}\,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=2028\cdot 2^{2017}$. A innym przykładem jest $n=4056\cdot 2^{2017}$.

117*. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n<n^{2^{2017}}<8^n\,.$$

Rozwiązanie:

Ślepa uliczka

Przyjmijmy $n=2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$4^{2^k}<2^{k\cdot 2^{2017}}<8^{2^k}\,,$$

czyli kolejno

$$2\cdot 2^k<k\cdot 2^{2017}<3\cdot 2^k\,,$$

$$2\cdot 2^{k-2017}<k<3\cdot 2^{k-2017}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Jednak nie udaje się dobrać liczby naturalnej k, która spełniałaby nierówności ($\heartsuit$).

Rozwiązanie poprawne

Przyjmijmy $n=k\cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$4^{k\cdot 2^{2017}}<\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<8^{k\cdot 2^{2017}}\,,$$

czyli

$$\left(4^k\right)^{2^{2017}}<\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<\left(8^k\right)^{2^{2017}}\,,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$4^k<k\cdot 2^{2017}<8^k\,,$$

$$2^{2k}<k\cdot 2^{2017}<2^{3k}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że nierówności ($\clubsuit$) są prawdziwe dla $k=1000$, gdyż wówczas

$$2^{2k}=2^{2000}<1000\cdot 2^{2017}<2^{10}\cdot 2^{2017}=2^{2027}<2^{3000}=2^{3k}\,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=1000\cdot 2^{2017}$.

Uwaga

Liczbę wymaganą w zadaniu otrzymamy także dla k spełniających nierówności

$$676\leqslant k\leqslant 1013\,.$$

Zauważ, że wśród tych liczb nie ma potęgi dwójki!!!

118. Udowodnić nierówność
$$n^{n^{2^{1000}}} < 2^{2^n}$$
dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $n=2^{2^k}$, gdzie k jest liczbą naturalną. Dana w zadaniu nierówność przyjmuje wówczas postać
$$\left(2^{2^k}\right)^{\left(2^{2^k}\right)^{2^{1000}}} < 2^{2^{2^{2^k}}},$$
co po uproszczeniu sprowadza się do
$$2^{2^{k+2^{k+1000}}} < 2^{2^{2^{2^k}}}. \tag{1}$$

Dwukrotne zlogarytmowanie przy podstawie 2 nierówności (1) prowadzi do nierówności równoważnej
$$k+2^{k+1000} < 2^{2^k}. \tag{2}$$
Zauważmy, że nierówność (2) jest spełniona dla $k=10$, gdyż wówczas mamy
$$L=10+2^{1010} < 2^4+2^{1010} < 2^{1010}+2^{1010} = 2^{1011} < 2^{1024} = P.$$

Odpowiedź:

Przykładem liczby spełniającej warunki zadania jest $n=2^{2^{10}}=2^{1024}$.

119. Niech $A_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n<2$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności
$$A_n<2.$$

1° Dla $n=1$ mamy $A_1=\sqrt{2}$, dowodzona nierówność przybiera więc postać
$$\sqrt{2}<2,$$
jest zatem prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że
$$A_n<2. \tag{$\clubsuit$}$$

Wykażemy, że wówczas
$$A_{n+1}<2. \tag{$\diamondsuit$}$$

Zauważmy, że
$$A_{n+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego (♣) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a > 1$ i $x < y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n} < \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\,,$$

co kończy dowód nierówności (♢).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

120. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{3}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 3$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n < 3\,.$$

1° Dla $n=1$ mamy $A_1 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, dowodzona nierówność przybiera więc postać

$$\sqrt{8} < 3 = \sqrt{9}\,,$$

jest zatem prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < 3\,. \qquad (♣)$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1} < 3\,. \qquad (♢)$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n}\,,$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego (♣) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a > 1$ i $x < y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n} < \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3\,,$$

co kończy dowód nierówności (♢).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

121. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n}\right| < \frac{D}{n^3}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy lewą stronę nierówności w postaci niezawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-\frac{C}{n}\right|=\left|\sqrt{n^2+1}-\left(n+\frac{C}{n}\right)\right|=\left|\frac{n^2+1-\left(n+\frac{C}{n}\right)^2}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{C}{n}\right)}\right|=\left|\frac{1-2C-\frac{C^2}{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{C}{n}\right)}\right|.$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującymi składnikami są 1 oraz $2C$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy C tak, aby te dwa składniki się uprościły, czyli $C=1/2$. Przy tej wartości C wykonujemy szacowanie od góry:

$$\frac{\frac{1}{4n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{1}{2n}\right)}=\frac{1}{4n^2\left(\sqrt{n^2+1}+n+\frac{1}{2n}\right)}<\frac{1}{4n^2\left(\sqrt{n^2+0}+n+0\right)}=\frac{1/8}{n^3},$$

co kończy rozwiązanie zadania z $D=1/8$.

Uwagi:

Stała C jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z $C\neq 1/2$ jest błędne.

Stała $D=1/8$ jest najmniejsza możliwa. Każde rozwiązanie z $D<1/8$ jest błędne.

122. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}\leqslant D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 6C$ (wersja łatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 4C$ (wersja trudniejsza).

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}=\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}\cdot\frac{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4}{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4}=\frac{n^8+3n^6-n^8}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}$$

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}\leqslant\frac{3n^6}{(7n^2-4n^2+0)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)}=\frac{3}{3\cdot 2}=\frac{1}{2}=D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}\geqslant\frac{3n^6}{(7n^2-0+5n^2)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)}=\frac{3}{12\cdot 3}=\frac{1}{12}=C,$$

co daje zależność $D=6C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji łatwiejszej.

Subtelniejsze szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $4(n-1)\geqslant 0$ zamiast $4n\geqslant 0$ i wygląda następująco:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}=\frac{3n^6}{(7n^2-4(n-1)+1)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3n^6}{(7n^2-0+n^2)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)}=\frac{3}{8\cdot 3}=\frac{1}{8}=C\,,$$

co daje zależność $D=4C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji trudniejszej.

123. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 8C$ (wersja najłatwiejsza).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 4C$ (wersja średnio trudna).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 2C$ (wersja najtrudniejsza).

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant\frac{6n^{11}-0+2n^{11}}{6n^{11}-3n^{11}+0}=\frac{8n^{11}}{3n^{11}}=\frac{8}{3}=D\,.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\geqslant\frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0+3n^{11}}=\frac{3n^{11}}{9n^{11}}=\frac{1}{3}=C\,,$$

co daje zależność $D=8C$ wystarczającą do rozwiązania wersji najłatwiejszej.

Subtelniejsze szacowania wykorzystują nierówności $-3n^6+2\leqslant -3+2=-1<0$ oraz $-3n^5+3\leqslant -3+3=0$ zamiast odpowiednio $-3n^6\leqslant 0$ oraz $-3n^5\leqslant 0$ i wyglądają następująco:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}=\frac{6n^{11}+(-3n^6+2)}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant\frac{6n^{11}-0}{6n^{11}-3n^{11}+0}=\frac{6n^{11}}{3n^{11}}=2=D\,,$$

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}=\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}+(-3n^5+3)}\geqslant\frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0}=\frac{3n^{11}}{6n^{11}}=\frac{1}{2}=C\,.$$

To daje zależność $D=4C$ wystarczającą do rozwiązania wersji średniej.

Można też zauważyć, że

$$6n^{11}-3n^6+2\leqslant 6n^{11}-3n^5+2<6n^{11}-3n^5+3\,,$$

skąd

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}<1=D\,.$$

Zatem rozwiązanie wersji średniej można uzyskać także przy użyciu szacowań z $C=1/3$ oraz $D=1$.

Przedstawione wyżej szacowania z $C=1/2$ oraz $D=1$ składają się na rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

124. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D, a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leqslant \sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+2}+\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+4}+\ldots+\sqrt{16n^2-1}+\sqrt{16n^2} \leqslant Dn^k\,.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C:

- Przy $D/C \geqslant 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu suma ma $12n^2$ składników. Możemy zatem wykonać szacowania

$$24n^3=12n^2\cdot\sqrt{4n^2}\leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} \leqslant 12n^2\cdot\sqrt{16n^2}=48n^3\,,$$

co kończy rozwiązanie w wersji najłatwiejszej.

Uzyskaliśmy tu liczby $k=3$, $C=24$, $D=48$ i iloraz $D/C=2$.

Bardziej subtelne szacowanie wymaga rozbicia wyjściowej sumy na dwie sumy

$$\sum_{i=4n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} = \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2}\sqrt{i} + \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i}\,,$$

a następnie wykonania szacowania dla każdej z sum z osobna.

Otrzymujemy

$$10n^3=5n^2\cdot\sqrt{4n^2}\leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2}\sqrt{i} \leqslant 5n^2\cdot\sqrt{9n^2}=15n^3$$

oraz

$$21n^3=7n^2\cdot\sqrt{9n^2}\leqslant \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} \leqslant 7n^2\cdot\sqrt{16n^2}=28n^3\,,$$

skąd po dodaniu

$$31n^3\leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i} \leqslant 43n^3\,.$$

To kończy rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

Uzyskane liczby to $k=3$, $C=31$, $D=43$, a zatem $D/C=43/31<45/30=3/2$.

125. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant \frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t}\leqslant 18C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t}=\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot\left(8n^7\right)^s}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot\left(3n^7\right)^t}=\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}\leqslant\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+0}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=\frac{\left(3n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(2n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=2^{2s}\cdot n^{2s-3t}$$

i od dołu

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}\geqslant\frac{\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^{10}}+n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=\frac{\left(2n^4\right)^t\cdot 2^{3s}\cdot n^{7s}}{\left(4n^5\right)^s\cdot 3^t\cdot n^{7t}}=\frac{2^{s+t}\cdot n^{2s-3t}}{3^t}\,.$$

Ponieważ oszacowania mają być niezależne od n, musi być $2s-3t=0$, wobec czego przyjmujemy $s=3$ i $t=2$. Wówczas dolne oszacowanie przybiera wartość $C=32/9$, a górne $64=18C$.

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $s=3$, $t=2$ oraz $C=32/9$.

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

126. $10^{100} < 2^{500} < 10^{200}$

127. $10^{500} < 3^{2000} < 10^{1000}$

128. $10^{2000} < 2^{10000} < 10^{5000}$

129. $10^{10000} < 30^{10000} < 10^{20000}$

130. $10^{200} < 2^{2^{10}} < 10^{500}$

131. $10^{10000} < 4444^{4444} < 10^{20000}$

132. $10^{20000} < 7777^{7777} < 10^{50000}$

133. $10^{5000} < 2011^{2011} < 10^{10000}$

134. $10^{10000} < 222^{5555} < 10^{20000}$

135. $10^{500} < 5555^{222} < 10^{1000}$

136. $$10^{500} < 333^{333} < 10^{1000}$$

137. $$10^{20000} < 10000! < 10^{50000}$$

138. $$10^{1000} < 666! < 10^{2000}$$

139. $$10^{10000} < 5000! < 10^{20000}$$

140. $$10^{100000} < 35000! < 10^{200000}$$

141. $$10^{200000} < \left(10^5\right)! < 10^{500000}$$

142. $$10^{200} < \left(7+2\sqrt{2}\right)^{500} < 10^{500}$$

143. $$10^{500} < \left(6+3\sqrt{2}\right)^{500} < 10^{1000}$$

144. $$10^{200} < \left(91+\sqrt{91}\right)^{100} < 10^{500}$$

145. $$10^{5} < \binom{1000}{3} < 10^{10}$$

146. $$10^{10} < \binom{1000}{4} < 10^{20}$$

147. $$10^{10} < \binom{10000}{5} < 10^{20}$$

148. $$10^{200} < \binom{10^5}{100} < 10^{500}$$

149. $$10^{100} < \binom{10^{10}}{20} < 10^{200}$$

150. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$C \leqslant \sqrt{9n^2+40n} - \sqrt{9n^2+16n} \leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci
$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$
prawdziwy w przypadku $a+b \neq 0$, otrzymujemy
$$\sqrt{9n^2+40n} - \sqrt{9n^2+16n} = \frac{24n}{\sqrt{9n^2+40n}+\sqrt{9n^2+16n}} = \frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\,.$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli n od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\geqslant\frac{24}{\sqrt{9+40}+\sqrt{9+16}}=\frac{24}{7+5}=2=C\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli $1/n$ przez 0) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\leqslant\frac{24}{\sqrt{9+0}+\sqrt{9+0}}=\frac{24}{3+3}=4=2C\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=2$.

Uwaga:

Nietrudno zauważyć, że ciąg $\left(\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica[1] 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $C=2$.

151. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[3]{n^3+63n^2}-n\leqslant 7C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\,.$$

Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3+63n^2}-n=\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\,.$$

Dalszą część rozwiązania można przeprowadzić dwoma sposobami.

Sposób I

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\geqslant\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^3}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^3}+n^2}=$$

$$=\frac{63n^2}{16n^2+4n^2+n^2}=\frac{63n^2}{21n^2}=3$$

[1] Tu i wszędzie dalej, gdzie pojawia się granica ciągu: Jeśli nie wiesz, co to jest, odłóż czytanie tych fragmentów na później.

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\leqslant\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+0}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2}=\frac{63n^2}{3n^2}=21=7\cdot 3\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3$.

Sposób II

Oznaczamy uzyskane wyrażenie przez a_n i przepisujemy je w postaci

$$a_n=\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}=\frac{63}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}+1}\,.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n, ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1\leqslant a_n\leqslant\lim_{n\to\infty}a_n\,.$$

Ponieważ $a_1=3$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=21$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=3$.

152. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n\leqslant 32C\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, powinniśmy przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia doprowadzić je do postaci, w której można będzie wykonać odejmowanie.

W tym celu trzykrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera.

Możemy też od razu zastosować wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,,$$

który powstaje właśnie przez trzykrotne skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy

$$\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n=\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\,.\qquad(\diamondsuit)$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^8}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^8}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^8}+n^4\right)}=$$

$$= \frac{255n^7}{17n \cdot 5n^2 \cdot 3n^4} = \frac{255n^7}{255n^7} = 1$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+0}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)} =$$

$$= \frac{255n^7}{2n \cdot 2n^2 \cdot 2n^4} = \frac{255n^7}{8n^7} = \frac{255}{8} < \frac{256}{8} = 32\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Sposób II:

Zaczynamy jak w sposobie I. Otrzymawszy wyrażenie $(\diamondsuit)$ przekształcamy je dalej i oznaczamy przez a_n:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)} =$$

$$= \frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255n^{-1}}+1\right)} = a_n\,.$$

Ponieważ w powyższym wyrażeniu wraz ze wzrostem n maleje mianownik, a przy tym wszystkie składowe tego wyrażenia są dodatnie, ciąg (a_n) jest rosnący. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą więc nierówności

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{k\to\infty} a_k\,. \qquad (\clubsuit)$$

Ponieważ

$$a_1 = \sqrt[8]{1+255} - 1 = 2 - 1 = 1$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255k^{-1}}+1\right)} =$$

$$= \frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)} = \frac{255}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{255}{8} < \frac{256}{8} = 32\,,$$

otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Uwaga:

Formalnie poprawna, ale dydaktycznie bardzo niezręczna wersja nierówności $(\clubsuit)$, to

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

W powyższym wzorze zmienna n występuje w dwóch zupełnie różnych rolach. Przemianowanie jednego z jej bytów na k pozwala uniknąć nieporozumień.

153. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leqslant \sqrt[4]{n^4+15n^2} - n \leqslant \frac{4C}{n}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)}$$

otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4+15n^2}-n=\frac{15n^2}{\left(\sqrt{n^4+15n^2}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+15n^2}+n\right)}=\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}\geqslant\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+15}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+15}+1\right)}=\frac{1}{n}\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}\leqslant\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)}=\frac{15}{4n}<\frac{16}{4n}=\frac{4}{n}\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=1$.

154. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n}\leqslant 11C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy w liczniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a w mianowniku następujący wzór na różnicę czwartych potęg:

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n}=\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\leqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^4}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$

$$=\frac{11\cdot 4n\cdot 10n^2}{10n\cdot 80n^2}=\frac{11}{20}$$

i od dołu

$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\geqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+0}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11n^2}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$

$$=\frac{11\cdot 2n\cdot 2n^2}{11n\cdot 80n^2}=\frac{1}{20}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1/20$.

155. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}\leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}=\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\leqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40n^2}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)}=\frac{24\cdot(7n+3n)}{40\cdot(5n+5n)}=\frac{24\cdot 10n}{40\cdot 10n}=\frac{3}{5}$$

i od dołu

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\geqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+0}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24n^2}+5n\right)}=\frac{24\cdot(3n+3n)}{40\cdot(7n+5n)}=\frac{24\cdot 6n}{40\cdot 12n}=\frac{3}{10}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3/10$.

156. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.
Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D<3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2}\leqslant D\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując do licznika wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\,,$$

a do mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2}=\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot 5}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując licznik od dołu i mianownik od góry:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot 5}\geqslant\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+0}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7n^3)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7n^3}+n^2\right)\cdot 5}=\frac{4}{5}\,.$$

Następnie szacujemy od góry, szacując licznik od góry i mianownik od dołu:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot 5}\leqslant\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5n^4}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+0)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2\right)\cdot 5}=\frac{7}{3}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi

$$C=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\qquad\text{i}\qquad D=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}=\frac{35}{15}<\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=3C\,.$$

157. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}}\leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq 0$, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}\,. \tag{3}$$

Szacowanie od dołu (licznika od dołu i mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}\geqslant\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+0}+\sqrt{25n+0}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28n}+\sqrt{36n+13n}\right)}=$$

$$=\frac{15\cdot 10\cdot\sqrt{n}}{64\cdot\left(\sqrt{64n}+\sqrt{49n}\right)}=\frac{150\cdot\sqrt{n}}{64\cdot 15\cdot\sqrt{n}}=\frac{5}{32}=C\,. \tag{4}$$

Szacowanie od góry (licznika od góry i mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}\leqslant\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75n}+\sqrt{25n+11n}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+0}+\sqrt{36n+0}\right)}=$$

$$=\frac{15\cdot\left(\sqrt{100n}+\sqrt{36n}\right)}{64\cdot12\cdot\sqrt{n}}=\frac{15\cdot16\cdot\sqrt{n}}{64\cdot12\cdot\sqrt{n}}=\frac{5}{16}=2C\,. \tag{5}$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=5/32$.

158. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k\leqslant\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1}\leqslant 4C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Szacujemy dane w treści zadania wyrażenie od góry (szacujemy licznik od góry, a mianownik od dołu, upodabniając wszystkie składniki do składnika dominującego; następnie szacujemy współczynniki pod pierwiastkami tak, aby przy pierwiastkowaniu uzyskać liczby całkowite):

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1}<\frac{\sqrt{40n-0}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{40n+0}-n^{1/3}}<\frac{\sqrt{49n}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{27n}-n^{1/3}}=\frac{10n^{1/2}}{2n^{1/3}}=5n^{1/6}\,.$$

Analogiczne szacowanie od dołu (licznik od dołu, mianownik od góry) prowadzi do:

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1}>\frac{\sqrt{40n-11n}+0}{\sqrt[3]{40n+11n}-0}=\frac{\sqrt{29n}}{\sqrt[3]{51n}}>\frac{\sqrt{25n}}{\sqrt[3]{64n}}=\frac{5n^{1/2}}{4n^{1/3}}=\frac{5n^{1/6}}{4}\,.$$

Udowodniliśmy więc żądane nierówności ze stałymi $C=5/4$ i $k=1/6$.

Uwagi:

Liczba $k=1/6$ jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie, w którym występuje inna wartość k, jest błędne.

Stała C wynika po części z natury szacowanego wyrażenia, a po części z przyjętej przez nas metody szacowania. Przy innej strategii szacowania można sobie wyobrazić poprawne rozwiązanie z inną stałą C.

W powyższym rozwiązaniu występują ostre nierówności, podczas gdy w treści zadania nierówności są słabe. To dlatego, że celem zadania jest uzyskanie zasadniczego oszacowania, a nie śledzenie, które nierówności są słabe, a które ostre – stąd słabe nierówności w tezie zadania, pomimo że łatwo można uzyskać ostre. Przy tak sformułowanej treści zadania, w przedstawionym wyżej rozwiązaniu można więc zamienić nierówności ostre na słabe (wszystkie lub niektóre z nich).