

Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w piątek 20.10.2023, wtorek 24.10.2023 i piątek 27.10.2023.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

3. Szacowanie liczb i wyrażeń.

Która z liczb jest większa ?

78. $123456 \cdot 123458$ czy 123457^2 79. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$
80. $(\sqrt[4]{83}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{83}-2)^{666}$ 81. $(\sqrt[4]{79}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-2)^{666}$
82. $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{666}$ 83. $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{667}$
84. 2^{1000} czy 3^{700} 85. 5^{444} czy 3^{700} 86. $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$ 87. $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$
88. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$ 89. $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$ 90. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$
91. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$ 92. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$ 93. $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$
94. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$ 95. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12 96. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$
97. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$ 98. $\log_9 27$ czy $\log_4 8$ 99. $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
100. $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$ 101. $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
102. $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$ 103. $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
104. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$ 105. $\log_2 3$ czy $\log_5 13$ 106. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do niektórych pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną

107. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{17})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{17})^{2015}$?
108. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{37})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{37})^{2015}$?
109. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{57})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{57})^{2015}$?
110. Która liczba jest większa: $(7-\sqrt{77})^{2017}$ czy $(7-\sqrt{77})^{2015}$?

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

126. $< 2^{500} <$
127. $< 3^{2000} <$
128. $< 2^{10000} <$
129. $< 30^{10000} <$
130. $< 2^{2^{10}} <$
131. $< 4444^{4444} <$
132. $< 7777^{7777} <$
133. $< 2011^{2011} <$
134. $< 222^{5555} <$
135. $< 5555^{222} <$
136. $< 333^{333} <$
137. $< 10000! <$
138. $< 666! <$
139. $< 5000! <$
140. $< 35000! <$
141. $< (10^5)! <$
142. $< (7 + 2\sqrt{2})^{500} <$
143. $< (6 + 3\sqrt{2})^{500} <$
144. $< (91 + \sqrt{91})^{100} <$
145. $< \binom{1000}{3} <$
146. $< \binom{1000}{4} <$
147. $< \binom{10000}{5} <$
148. $< \binom{10^5}{100} <$
149. $< \binom{10^{10}}{20} <$

Poniższe zadania omówić tylko wtedy, gdy zostanie czasu.

150. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} \leq 2C.$$

151. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

152. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[8]{n^8 + 255n^7} - n \leq 32C.$$

153. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leq \sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n \leq \frac{4C}{n}.$$

154. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 11} - 5n}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} - n} \leq 11C.$$

155. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} \leq 2C.$$

156. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.

Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D < 3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt[3]{n^3 + 7} - n}{\sqrt{4n^4 + 5} - 2n^2} \leq D.$$

157. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n + 28} - \sqrt{36n + 13}}{\sqrt{25n + 75} - \sqrt{25n + 11}} \leq 2C.$$

158. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leq \frac{\sqrt{40n - 11} + 3}{\sqrt[3]{40n + 11} - 1} \leq 4C \cdot n^k.$$