

**65.** Dowieść, że liczba  $\log_{45} 75$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\log_{45} 75$  jest wymierna i niech  $m/n$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{45} 75 &= \frac{m}{n}, \\ 45^{m/n} &= 75, \\ 45^m &= 75^n.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $m, n$ .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m} \cdot 5^m = 3^n \cdot 5^{2n}.$$

**Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:**

$$\begin{cases} 2m = n \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich  $m, n$ , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = 2n > n,$$

czyli  $n > n$ , co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste  $m = n = 0$  nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba  $\log_{45} 75$  jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\log_{45} 75$  jest niewymierna.

**66.** Niech

$$a = 2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 6^{10} \quad \text{oraz} \quad b = 2^{34} \cdot 3^{12} \cdot 6^{10}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba  $\log_a b$  jest wymierna czy niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Ponieważ  $a = 2^{42} \cdot 3^{21} = 12^{21}$  oraz  $b = 2^{44} \cdot 3^{22} = 12^{22}$ , otrzymujemy

$$\log_a b = \frac{22}{21},$$

co jest liczbą wymierną.

**67.** Dowieść, że liczba  $\log_{(3/2)} \left( \frac{9}{8} \right)$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$  jest wymierna i niech  $m/n$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right) &= \frac{m}{n}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{m/n} &= \frac{9}{8}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^m &= \left(\frac{9}{8}\right)^n, \\ 8^n \cdot 3^m &= 2^m \cdot 9^n.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $m, n$ .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n} \cdot 3^m = 2^m \cdot 3^{2n}.$$

**Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:**

$$\begin{cases} 3n = m \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich  $m, n$ , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m = 3n > 2n = m,$$

czyli  $m > m$ , co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste  $m = n = 0$  nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba  $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$  jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$  jest niewymierna.

**68.** Dowieść, że liczba  $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$  jest wymierna i niech będzie ona równa  $-m/n$ , gdzie  $m, n$  są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right) = -\frac{m}{n},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{15}\right)^{-m/n} &= \frac{15}{8}, \\ \left(\frac{4}{15}\right)^{-m} &= \left(\frac{15}{8}\right)^n, \\ \left(\frac{15}{4}\right)^m &= \left(\frac{15}{8}\right)^n, \\ 15^m \cdot 8^n &= 15^n \cdot 4^m. \end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $m, n$ .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^{2m} \cdot 3^n \cdot 5^n.$$

**Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:**

$$\begin{cases} 3n = 2m \\ m = n \\ m = n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich  $m, n$ , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = 3n > 2n = 2m,$$

czyli  $2m > 2m$ , co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste  $m = n = 0$  nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba  $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$  jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$  jest niewymierna.

**Uwaga:** Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami piętnastki, lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są nieujemne.

**69.** Dowieść, że liczba  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ . Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}, \\ w - \sqrt{2} &= \sqrt[3]{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(w - \sqrt{2})^3 &= 3, \\ w^3 - 3w^2 \cdot \sqrt{2} + 6w - 2\sqrt{2} &= 3, \\ w^3 + 6w - 3 &= (3w^2 + 2) \cdot \sqrt{2}, \\ \frac{w^3 + 6w - 3}{3w^2 + 2} &= \sqrt{2},\end{aligned}$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna (zauważmy, że mianownik  $3w^2 + 2$  jest różny od zera jako liczba dodatnia), a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

**70.** Dane są takie liczby rzeczywiste  $a, b, c$ , że liczby  $a + b + c$  oraz  $a^2 + b^2 + c^2$  są wymierne. Dowieść, że liczba  $ab + bc + ca$  jest wymierna.

*Rozwiązanie:*

Teza zadania wynika ze wzoru

$$ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}.$$

**71.** Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej  $x \neq 1$ , że liczba  $\log_x(x + 10)$  jest wymierna.

**Wskazówka:** Załóż, że  $\log_x(x + 10)$  jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć  $x$ .

Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości  $\log_x(x + 10)$ .

*Rozwiązanie:*

*Sposób I:*

Zakładając, że

$$\log_x(x + 10) = w,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w = x + 10. \quad (\#)$$

Wybieramy taką wartość wymierną  $w$ , abyśmy umieli rozwiązać równanie  $(\#)$  i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla  $w = 2$  równanie  $(\#)$  przybiera postać

$$x^2 = x + 10.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe<sup>1</sup> otrzymując

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2},$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$$

<sup>1</sup>Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

i wówczas

$$\log_x(x+10) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

*Sposób II:*

Postępujemy jak w sposobie I przyjmując  $w = -1$ , co prowadzi nas do równania

$$x^{-1} = x + 10$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x = \sqrt{26} - 5.$$

Wówczas

$$\log_x(x+10) = \log_x x^{-1} = -1$$

jest liczbą wymierną.

**72.** Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich  $x \neq 1$ , dla których liczba

$$\log_x(x+120)$$

jest wymierna.

**Wsk.:** Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem. Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości  $\log_x(x+120)$ .

*Rozwiązanie:*

*Przykład I:*

Dla  $x = 5$  liczba  $\log_x(x+120) = \log_5 125 = 3$  jest liczbą wymierną.

*Przykład II:*

Dla  $x = 8$  liczba  $\log_x(x+120) = \log_8 128 = \frac{7}{3}$  jest liczbą wymierną.

*Przykład III:*

Zakładając, że

$$\log_x(x+120) = w,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w = x + 120. \quad (\#)$$

Wybieramy taką wartość wymierną  $w$ , abyśmy umieli rozwiązać równanie  $(\#)$  i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla  $w = 2$  równanie  $(\#)$  przybiera postać

$$x^2 = x + 120.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe<sup>2</sup> otrzymując

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{481}}{2},$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1 + \sqrt{481}}{2}$$

<sup>2</sup>Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

i wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

*Przykład IV:*

Postępujemy jak w przykładzie III przyjmując  $w = -1$ , co prowadzi nas do równania

$$x^{-1} = x + 120$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x = \sqrt{3601} - 60.$$

Wówczas

$$\log_x(x+120) = \log_x x^{-1} = -1$$

jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = -1.$$

podstawiamy  $n = 3600$ , skąd otrzymujemy  $x = \sqrt{3601} - 60$ .

**73.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych  $n \geq 2$ , że liczba

$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k(k+1)$$

jest wymierna.

*Rozwiązanie:*

Przyjmijmy  $n = 2^{2^m} - 1$ , gdzie  $m$  jest liczbą naturalną. Wówczas korzystając z równości  $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$  otrzymujemy

$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k(k+1) = \log_2 \prod_{k=2}^n \log_k(k+1) = \log_2 \log_2(n+1) = \log_2 \log_2 2^{2^m} = m.$$

**74.** Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna  $q > 1$  spełniająca równość  $q^q = 16$ .

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że taka liczba  $q$  istnieje i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego  $m/n$  o naturalnym liczniku i mianowniku.

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/n} &= 16, \\ \left(\frac{m}{n}\right)^m &= 16^n, \\ m^m &= 16^n \cdot n^m. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

Dowód zostanie zakończony, jeżeli wykażemy, że równanie  $(\heartsuit)$  nie może być spełnione przez względnie pierwsze liczby naturalne  $m, n$ . Tę część dowodu można przeprowadzić różnymi sposobami.

*Sposób I (najprostszy):*

Liczba  $n$  nie może być równa 1, gdyż w takim przypadku równanie ( $\heartsuit$ ) przyjęłoby postać  $m^m = 16$ , skąd wobec  $2^2 < 16 < 3^3$  mielibyśmy  $2 < m < 3$ .

Zatem liczba  $n$ , jako liczba naturalna większa od 1, ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez  $p$ . Wówczas prawa strona równości ( $\heartsuit$ ) jest podzielna przez  $p$ , a zatem lewa strona też jest podzielna przez  $p$ . Skoro jednak liczba  $m^m$  jest podzielna przez liczbę pierwszą  $p$ , to także  $m$  jest podzielne przez  $p$ , co przeczy założeniu, że liczby  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze.

*Sposób II (jeśli ktoś się zapatrzy na liczbę  $16 = 2^4$  i nie dostrzeże sposobu I):*

Ponieważ prawa strona równania ( $\heartsuit$ ) jest podzielna przez 2, to i lewa strona też jest podzielna przez 2, a w konsekwencji liczba  $m$  jest parzysta, a względnie pierwsza z nią liczba  $n$  jest nieparzysta. Niech  $k$  będzie wykładnikiem, z jakim liczba 2 wchodzi do rozkładu liczby  $m$  na iloczyn potęg liczb pierwszych. Porównując wykładniki, z jakimi dwójka występuje po obu stronach równości ( $\heartsuit$ ) otrzymujemy

$$km = 4n, \quad \text{skąd} \quad \frac{m}{n} = \frac{4}{k}.$$

Wobec nierówności  $m > n$  musi być  $k \leq 3$ , skąd para  $(m, n)$  jest jedną z par  $(4, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 3)$  (odpowiednio dla  $k = 1, 2, 3$ ).

To zostawia trzy potencjalne wartości  $q$  mogące spełniać daną w treści zadania równość, a mianowicie  $q = 4$ ,  $q = 2$  i  $q = 4/3$ . Jednak bez trudu sprawdzamy, że żadna z tych liczb nie spełnia równania  $q^q = 16$ , np. dlatego, że żadna nie wpada do przedziału  $(2, 3)$ .

---

Poniższe 3 zadania są podobne do poprzednich. Omówić je tylko wtedy, gdy zostanie czasu.

---

**75.** Dowieść, że liczba  $\log_{60}150$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\log_{60}150$  jest wymierna i niech  $m/n$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_{60}150 &= \frac{m}{n}, \\ 60^{m/n} &= 150, \\ 60^m &= 150^n. \end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $m, n$ .

*Sposób I*

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = n \\ m = n \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich  $m, n$ , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = n,$$

czyli  $n > n$ , co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste  $m = n = 0$  nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

### Sposób II

Ostatnią niezerową cyfrą liczby  $60^m$  jest 6, a ostatnią niezerową cyfrą liczby  $150^n$  jest 5, zatem liczby te nie mogą być równe.

W obu sposobach doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba  $\log_{60}150$  jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\log_{60}150$  jest niewymierna.

**76.** Dowieść, że liczba  $\log_{2700}9000$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\log_{2700}9000$  jest wymierna i niech  $m/n$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_{2700}9000 &= \frac{m}{n}, \\ 2700^{m/n} &= 9000, \\ 2700^m &= 9000^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $m, n$ .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyn potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^{3m} \cdot 5^{2m} = 2^{3n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{3n}. \tag{2}$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 3m = 2n \\ 2m = 3n \end{cases} \tag{3}$$



Jednak układ równań (3) nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich  $m, n$ , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = 3n > 2n = 3m > 2m,$$

czyli  $2m > 2m$ , co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiążemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste  $m = n = 0$  nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba  $\log_{2700} 9000$  jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\log_{2700} 9000$  jest niewymierna.

**77.** Dowieść, że liczba  $\log_{(9/5)} \left( \frac{27}{25} \right)$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\log_{(9/5)} \left( \frac{27}{25} \right)$  jest wymierna i niech  $m/n$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_{(9/5)} \left( \frac{27}{25} \right) &= \frac{m}{n}, \\ \left( \frac{9}{5} \right)^{m/n} &= \frac{27}{25}, \\ \left( \frac{9}{5} \right)^m &= \left( \frac{27}{25} \right)^n, \\ 9^m \cdot 25^n &= 27^n \cdot 5^m. \end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych  $m, n$ .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m} \cdot 5^{2n} = 3^{3n} \cdot 5^m.$$

**Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:**

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 2n = m \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że  $3n = 2m = 4n$ , skąd istnieje jedyne rozwiązanie rzeczywiste  $m = n = 0$ , które nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba  $\log_{(9/5)} \left( \frac{27}{25} \right)$  jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\log_{(9/5)} \left( \frac{27}{25} \right)$  jest niewymierna.