Kolokwium nr 1: środa 18.10.2023, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 1–77.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w piątek 13.10.2023 i wtorek 17.10.2023.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

2. Liczby wymierne i niewymierne.

39. Czy istnieją takie liczby naturalne $m, n > 1$, że $\log_m n = 13/7$?

40. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

Oszustwo **41.**
Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.
Rozwiązanie I:
Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.
Rozwiązanie II:
Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w = \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2 = 3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.
Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

42. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

43. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

44. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być uznane.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

45. $0<x<1$ oraz x jest niewymierna,

46. $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,

47. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

48. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

49. $(x+1)^2$ jest niewymierna,

50. x jest niewymierna, ale $x+\frac{1}{x}$ jest wymierna,

51. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,

52. 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,

53. 2^x+3^x jest liczbą wymierną,

54. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

55. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

56. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

57. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

58. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

59. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

60. $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

61. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

62. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

63. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

64. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

65. Dowieść, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

66. Niech
$$a=2^{32}\cdot 3^{11}\cdot 6^{10} \qquad \text{oraz} \qquad b=2^{34}\cdot 3^{12}\cdot 6^{10}\,.$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

67. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

68. Dowieść, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

69. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

70. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab+bc+ca$ jest wymierna.

71. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x\neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.
Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x+10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć x.
Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

72. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x\neq 1$, dla których liczba
$$\log_x(x+120)$$
jest wymierna.
Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.
Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

73. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n\geqslant 2$, że liczba
$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\log_k(k+1)$$
jest wymierna.

74. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna $q>1$ spełniająca równość $q^q=16$.

Poniższe 3 zadania są podobne do poprzednich. Omówić je tylko wtedy, gdy zostanie czasu.

---

75. Dowieść, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.

76. Dowieść, że liczba $\log_{2700}9000$ jest niewymierna.

77. Dowieść, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest niewymierna.