

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0 .

651. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 0$

NIE

652. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $x_0 = 0$

MIN

653. $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

MIN

654. $f(x) = 2 \cos x + \ln(1+x^2)$, $x_0 = 0$

MAX

655. $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$, $x_0 = 0$

NIE

656. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $x_0 = 1$

MAX

657. Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f = [a, b]$ ciągle pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+) > 0$

MIN

(ii) $f'(a^+) < 0$

MAX

(iii) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) > 0$

MIN

(iv) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) < 0$

MAX

(v) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) > 0$

MIN

(vi) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) < 0$

MAX

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-) > 0$

MAX

(viii) $f'(b^-) < 0$

MIN

(ix) $f'(b^-) = 0, f''(b^-) > 0$

MIN

(x) $f'(b^-) = 0, f''(b^-) < 0$

MAX

(xi) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0, f'''(b^-) > 0$

MAX

(xii) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0, f'''(b^-) < 0$

MIN

665. W zadaniach **665.1–665.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x).$$

W każdym z tych zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

665.1. $f_1''(0) = 2$

665.2. $f_1'''(0) = -3$

665.3. $f_1^{(4)}(0) = 8$

665.4. $f_1^{(5)}(0) = -30$

665.5. $f_2'''(0) = 6$

665.6. $f_2^{(4)}(0) = -12$

665.7. $f_2^{(5)}(0) = 40$

665.8. $f_3^{(4)}(0) = 24$

665.9. $f_3^{(5)}(0) = -60$

665.10. $f_4^{(5)}(0) = 120$

666. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = 110$

b) $f^{(10)}(0) = 90$

c) $f^{(9)}(0) = 72$

d) $f^{(8)}(0) = 56$

667. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^3 \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = 24$

b) $f^{(6)}(0) = 120$

c) $f^{(10)}(0) = 720$

d) $f^{(11)}(0) = 990$

668. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^{100} \cdot e^x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!}$

b) $f^{(101)}(0) = \mathbf{101!}$

c) $f^{(102)}(0) = \mathbf{102!/2}$

d) $f^{(103)}(0) = \mathbf{103!/6}$

669. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \mathbf{-8}$

b) $f^{(5)}(0) = \mathbf{0}$

c) $f^{(6)}(0) = \mathbf{32}$

d) $f^{(8)}(0) = \mathbf{-128}$

670. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{12!}.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \mathbf{-1/120}$

b) $f^{(12)}(0) = \mathbf{1/11}$

c) $f^{(13)}(0) = \mathbf{-13/12}$

d) $f^{(14)}(0) = \mathbf{14}$

671. Niech $f(x) = e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g , że

$$e^x = \sum_{k=0}^{404} \frac{x^k}{k!} + x^{405} \cdot g(x).$$

Wobec tego

$$f(x) = e^{x^5} = \sum_{k=0}^{404} \frac{x^{5k}}{k!} + x^{2025} \cdot g(x^5)$$

i w konsekwencji

$$f^{(2020)}(x) = \frac{2020!}{404!} + \frac{d^{2020}}{dx^{2020}} (x^{2025} \cdot g(x^5)).$$

Zatem

$$f^{(2020)}(0) = \frac{2020!}{404!}.$$

Analogicznie

$$f^{(2021)}(x) = \frac{d^{2021}}{dx^{2021}} (x^{2025} \cdot g(x^5)),$$

skąd

$$f^{(2021)}(0) = 0.$$

672. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + e^{-x} + ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takich funkcji gładkich g i h , że

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^5 \cdot g(x)$$

oraz

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^5 \cdot h(x).$$

Zatem

$$\ln(1+x) + e^{-x} = 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{5 \cdot x^4}{24} + x^5 \cdot (g(x) + h(x)).$$

Stąd wynika, że warunki zadania spełnia $a = -1/6$ i wówczas

$$f(x) = 1 - \frac{5 \cdot x^4}{24} + x^5 \cdot (g(x) + h(x)) = 1 + \left(\frac{-5}{24} + x \cdot (g(x) + h(x)) \right) \cdot x^4$$

ma w zerze lokalne maksimum, gdyż

$$\frac{-5}{24} + x \cdot (g(x) + h(x)) < 0$$

dla x bliskich 0.

673. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sin(x^3) + a \cdot \sin(x^5)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0) = 0.$$

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g , że

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^7 \cdot g(x).$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^3) + a \cdot \sin(x^5) = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} + x^{21} \cdot g(x^3) + a \cdot x^5 - \frac{a \cdot x^{15}}{6} + \frac{a \cdot x^{25}}{120} + a \cdot x^{35} \cdot g(x^5) = \\ &= x^3 + a \cdot x^5 - \frac{x^9}{6} + \frac{(1 - 20 \cdot a) \cdot x^{15}}{120} + x^{21} \cdot \left(g(x^3) + \frac{a \cdot x^4}{120} + a \cdot x^{14} \cdot g(x^5) \right). \end{aligned}$$

Warunek $f^{(15)}(0) = 0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik przy x^{15} jest równy 0, czyli dla $a = 1/20$.