Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 19.01.$\binom{4!}{3}$ i wtorek 23.01.$\binom{4!}{3}$.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zadania podobne do wcześniej rozwiązanych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

13. Wzór Taylora.

Przypominam wzór Taylora w zerze z użyteczną dla niektórych zadań postacią reszty:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+x^{n+1}\cdot g(x)\,,$$

gdzie g jest funkcją gładką, czyli C^∞, czyli mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu zera. Oczywiście musimy założyć, że funkcja f jest gładka w otoczeniu zera, ale to na ogół jest prawdą w przykładach, które spotykamy na swojej drodze.

Ogólna, nieco bardziej sformalizowana, wersja wzoru Taylora w tej postaci wygląda następująco:

Niech f będzie funkcją gładką w otoczeniu punktu x_0. Wówczas dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja g_n gładka w otoczeniu x_0, że dla każdego x odpowiednio bliskiego[1] x_0 zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+(x-x_0)^{n+1}\cdot g_n(x)\,.$$

Do tego trzeba dodać następujące spostrzeżenia[2]:

Po pierwsze:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n=n!$$

Po drugie, dla $k>n$:

$$\frac{d^k}{dx^k}x^n=0$$

I wreszcie po trzecie:

Wobec równości

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\cdot h(x)\right)=x^{n-1}\cdot\left(n\cdot h(x)+x\cdot h'(x)\right)$$

przez indukcję możemy udowodnić, że dla $k<n$ istnieje taka funkcja h_k, że

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n\cdot h(x)\right)=x^{n-k}\cdot h_k(x)\,,$$

a to ma w zerze wartość zero. Stąd wniosek, że dla gładkiej funkcji h oraz $k<n$ zachodzi

$$\left.\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n\cdot h(x)\right)\right|_{x=0}=0\,,$$

gdzie przez $\left.F(x)\right|_{x=a}$ rozumiemy $F(a)$.

[1]Sformułowanie "Dla każdego x odpowiednio bliskiego x_0 ..." można sformalizować jako: Istnieje takie $\delta>0$, że dla każdego $x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$ ...

[2]Dla uproszczenia te spostrzeżenia są sformułowane dla $x_0=0$.

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0.

651. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}$, $x_0=0$

652. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$, $x_0=0$

653. $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $x_0=0$

654. $f(x)=2\cos x+\ln\left(1+x^2\right)$, $x_0=0$

655. $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$, $x_0=0$

656. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$, $x_0=1$

657. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+)>0$

(ii) $f'(a^+)<0$

(iii) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)>0$

(iv) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)<0$

(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)>0$

(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)<0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-)>0$

(viii) $f'(b^-)<0$

(ix) $f'(b^-)=0$, $f''(b^-)>0$

(x) $f'(b^-)=0$, $f''(b^-)<0$

(xi) $f'(b^-)=f''(b^-)=0$, $f'''(b^-)>0$

(xii) $f'(b^-)=f''(b^-)=0$, $f'''(b^-)<0$

658. Dobrać takie liczby rzeczywiste a, b, c, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{1+x}+ax+bx^2+cx^3$$

spełniała warunek

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0\,.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

659. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}+ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0)=0\,.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

660. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+a\cdot e^x$$

miała w zerze (lokalne) ekstremum. Jakie to ekstremum?

661. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy, a ponadto

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0\,.$$

Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=f\left(x^2\right)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.

662. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy, a ponadto

$$f'(0)=f''(0)=0\,.$$

Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=f\left(x^3\right)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.

663. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy. Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=f\left(x^5\right)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.

664. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy. Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=x^5\cdot f(x)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.

665. W zadaniach **665.1–665.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x)\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

665.1. $f_1''(0) =$ .... **665.2.** $f_1'''(0) =$ ....

665.3. $f_1^{(4)}(0) =$ .... **665.4.** $f_1^{(5)}(0) =$ ....

665.5. $f_2'''(0) =$ .... **665.6.** $f_2^{(4)}(0) =$ ....

665.7. $f_2^{(5)}(0) =$ .... **665.8.** $f_3^{(4)}(0) =$ ....

665.9. $f_3^{(5)}(0) =$ .... **665.10.** $f_4^{(5)}(0) =$ ....

666. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^2 \cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \ldots.$ **b)** $f^{(10)}(0) = \ldots.$ **c)** $f^{(9)}(0) = \ldots.$ **d)** $f^{(8)}(0) = \ldots.$

667. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^3 \cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \ldots.$ **b)** $f^{(6)}(0) = \ldots.$ **c)** $f^{(10)}(0) = \ldots.$ **d)** $f^{(11)}(0) = \ldots.$

668. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^{100} \cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \ldots$ **b)** $f^{(101)}(0) = \ldots$ **c)** $f^{(102)}(0) = \ldots$ **d)** $f^{(103)}(0) = \ldots$

669. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0) = \ldots.$ **b)** $f^{(5)}(0) = \ldots.$ **c)** $f^{(6)}(0) = \ldots.$ **d)** $f^{(8)}(0) = \ldots.$

670. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{12!}\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0) = \ldots$ **b)** $f^{(12)}(0) = \ldots$ **c)** $f^{(13)}(0) = \ldots$ **d)** $f^{(14)}(0) = \ldots$

671. Niech $f(x)=e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

672. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}+ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0)=0\,.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

673. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0)=0\,.$$

674. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.

675. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.

Jednostajna ciągłość.

Dowieść, że funkcja f określona podanym wzorem nie jest jednostajnie ciągła[3]:

676. $f(x)=x^3$ **677.** $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$ **678.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ **679.** $f(x)=0,999^x$

680. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ **681.** $f(x)=\sin\left(x^2\right)$ **682.** $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

[3] W tym celu wskazać takie ciągi (x_n) i (y_n) punktów z dziedziny funkcji f, że

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0 \qquad \text{oraz} \qquad f(x_n)-f(y_n)\not\to 0\,.$$