

**601.** Niech funkcja  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16) + f(18) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(17) ?$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując dwukrotnie funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}},$$

skąd nierówność  $f''(x) > 0$  jest równoważna kolejnym nierównościami

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} > 0,$$

$$\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} > \frac{1}{x^2},$$

$$\sqrt{x} > 4,$$

$$x > 16.$$

Zatem  $f$  jest ściśle wypukła w przedziale  $[16; +\infty)$ , skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) > 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y \geq 16$ .

W szczególności

$$f(16) + f(18) > 2 \cdot f(17).$$

**602.** Niech funkcja  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując dwukrotnie funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność  $f''(x) < 0$  jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} &< 0, \\ \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} &< \frac{1}{x^2}, \\ x^{1/3} &< \frac{9}{2}, \\ x &< \frac{9^3}{2^3} = \frac{729}{8} = 91,125. \end{aligned}$$

Zatem  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $(0; 91,125)$ , skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y < 91,125$ .

W szczególności

$$f(89) + f(91) < 2 \cdot f(90).$$

**Uwaga:** Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89) + f(91) \approx \mathbf{0,036809335389}$$

oraz

$$2 \cdot f(90) \approx \mathbf{0,036809847546},$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

**603.** Niech  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61) + f(63) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(62) ?$$

*Rozwiązanie:*

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{2}{x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji  $f$  poprzez rozwiązanie nierówności  $f''(x) > 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} &> 0, \\ \frac{2}{x^2} &> \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}}, \\ 8 &> \sqrt{x}, \end{aligned}$$

$$x < 64,$$

co oznacza, że  $f''(x) > 0$  dla  $x \in (0, 64)$  oraz  $f''(x) < 0$  dla  $x \in (64, \infty)$ . W konsekwencji funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w przedziale  $(0, 64)$  i ściśle wklęsła w przedziale  $(64, \infty)$ .

Ponieważ  $f$  jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale  $(0, 64)$ , dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując  $x = 61$  oraz  $y = 63$ , a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(61) + f(63) > 2 \cdot f(62).$$

**Odpowiedź:** Liczba  $f(61) + f(63)$  jest większa od liczby  $2 \cdot f(62)$ .

**604.** Niech  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65) + f(67) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(66) ?$$

*Rozwiązanie:*

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{2}{x},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji  $f$  poprzez rozwiązanie nierówności  $f''(x) > 0$ :

$$-\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} > 0,$$

$$\frac{2}{x^2} > \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}},$$

$$8 > \sqrt{x},$$

$$x < 64,$$

co oznacza, że  $f''(x) > 0$  dla  $x \in (0, 64)$  oraz  $f''(x) < 0$  dla  $x \in (64, \infty)$ . W konsekwencji funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w przedziale  $(0, 64)$  i ściśle wklęsła w przedziale  $(64, \infty)$ .

Ponieważ  $f$  jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale  $(64, \infty)$ , dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując  $x = 65$  oraz  $y = 67$ , a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(65) + f(67) < 2 \cdot f(66).$$

**Odpowiedź:** Liczba  $f(65) + f(67)$  jest mniejsza od liczby  $2 \cdot f(66)$ .

**605.** Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \quad \text{czy} \quad 6 \cdot \arctg 104 ?$$

*Rozwiązanie:*

Rozważmy funkcję  $f$  daną wzorem  $f(x) = \arctg x$ . Ponieważ jej pochodna  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  jest malejąca na przedziale  $(0, +\infty)$ , funkcja  $f$  jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x_1, x_2$  i  $x_3$  oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a_1, a_2$  i  $a_3$  spełniających warunek  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$  zachodzi

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) > a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3),$$

co dla  $x_1 = 100, x_2 = 103, x_3 = 106, a_1 = 1/6, a_2 = 1/3, a_3 = 1/2$  prowadzi do nierówności

$$f(104) > \frac{f(100)}{6} + \frac{f(103)}{3} + \frac{f(106)}{2},$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \frac{100}{6} + \frac{103}{3} + \frac{106}{2} = \frac{100 + 2 \cdot 103 + 3 \cdot 106}{6} = \frac{624}{6} = 104.$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając  $f(x) = \arctg x$  otrzymujemy

$$6 \cdot \arctg 104 > \arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106.$$

**Uwaga:**

Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \approx \mathbf{9,367060}$$

oraz

$$6 \cdot \arctg 104 \approx \mathbf{9,367087}.$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

**606.** Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

*Rozwiązanie:*

Niech  $f$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(x) = \arctg x - \ln x$ . Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^3 + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 \cdot (x - 2) + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2},$$

co na pewno jest dodatnie dla  $x > 2$ . Wobec tego funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w przedziale  $(2, +\infty)$ . Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4) < \frac{f(3) + f(5)}{2},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościami:

$$\begin{aligned} 2f(4) &< f(3) + f(5), \\ 2 \arctg 4 - 2 \ln 4 &< \arctg 3 - \ln 3 + \arctg 5 - \ln 5, \\ 2 \arctg 4 + \ln 3 + \ln 5 &< \arctg 3 + \arctg 5 + 2 \ln 4. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:**

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad > \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

**607.** Niech funkcja  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując dwukrotnie funkcję  $f$  w przedziale  $(0, +\infty)$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność  $f''(x) < 0$  jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}} &< 0, \\ x^{1/3} &< 2, \\ x &< 8. \end{aligned}$$

Zatem  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $[0; 8]$ , skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych  $x, y \leq 8$ .

W szczególności

$$f(6) + f(8) < 2 \cdot f(7).$$

**608.** Niech funkcja  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[4]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79) + f(81) = \mathbf{39,79911\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(80) = \mathbf{39,79911\dots} ?$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując dwukrotnie funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}}$$

oraz

$$f''(x) = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}} - e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{3}{16 \cdot x^{7/4}} = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{x^{1/4} - 3}{16 \cdot x^{7/4}},$$

skąd nierówność  $f''(x) < 0$  jest równoważna kolejnym nierównościom

$$x^{1/4} - 3 < 0,$$

$$x^{1/4} < 3,$$

$$x < 81.$$

Zatem  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $[0; 81]$ , skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y \in [0; 81]$ .

W szczególności

$$f(79) + f(81) < 2 \cdot f(80).$$

**609.** Niech funkcja  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 10 \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600) + f(1602) = \mathbf{-67,54267816\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(1601) = \mathbf{-67,54267816\dots} ?$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując dwukrotnie funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{10}{x^2},$$

skąd nierówność  $f''(x) < 0$  jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{10}{x^2} &< 0, \\ \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} &> \frac{10}{x^2}, \\ \sqrt{x} &> 40, \\ x &> 1600. \end{aligned}$$

Zatem  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $[1600; +\infty)$ , skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y \geq 1600$ .

W szczególności

$$f(1600) + f(1602) < 2 \cdot f(1601).$$

**610.** Niech  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 432}$ . Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001) = f(36001/1000) \approx \mathbf{12,00016666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000} = 12 + \frac{1}{6000} \approx \mathbf{12,00016666666667}.$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 432)^{2/3}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 432)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{6 \cdot (x^2 + 432)}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \\ &= \frac{6x^2 + 6 \cdot 432 - 8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{-2x^2 + 2 \cdot 36^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{2 \cdot (-x^2 + 36^2)}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} < 0 \end{aligned}$$

dla  $x > 36$ , skąd wynika, że funkcja  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $[36, \infty)$ .

Zatem wykres funkcji  $f$  dla  $x > 36$  leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie 36. Ponieważ  $f(36) = 12$  oraz  $f'(36) = 1/6$ , dla  $x > 36$  zachodzi nierówność  $f(x) < 12 + (x - 36)/6$  i w konsekwencji

$$f(36,001) < 12 + \frac{0,001}{6} = 12 + \frac{1}{6000} = \frac{72000}{6000} + \frac{1}{6000} = \frac{72001}{6000}.$$

**Odpowiedź:** Wartość  $f(36,001)$  jest mniejsza od  $72001/6000$ .

**611.** Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej  $n > 0$ .

*Rozwiązanie:*

Po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie  $e$  dana w zadaniu nierówność przybiera postać

$$3 \cdot f(n+1) < 2 \cdot f(n) + f(n+3), \quad (\spadesuit)$$

gdzie  $f(x) = x \cdot \ln x$  dla  $x > 0$ . Ponieważ  $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$  oraz  $f''(x) = 1/x > 0$ , funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w przedziale  $(0, +\infty)$ , skąd wynika nierówność

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y\right) < \frac{2}{3} \cdot f(x) + \frac{1}{3} \cdot f(y)$$

prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y$ . W szczególności dla  $x = n$  oraz  $y = n+3$  otrzymujemy

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \cdot (n+3)\right) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3),$$

czyli

$$f(n+1) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3),$$

a to po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność  $(\spadesuit)$ .

**612.** Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

*Rozwiązanie:*

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja  $f$  była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki

$$W(0) = W'(0) = W''(0) = 0,$$

skąd

$$d = e = g = 0$$

i w konsekwencji

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji  $f$  w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = W'(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad W''(1) = 0,$$



co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 5a + 4b + 3c = 1 \\ 20a + 12b + 6c = 0 \end{cases}$$

który ma rozwiązanie  $a = 3$ ,  $b = -8$ ,  $c = 6$ .

**Odpowiedź:** Wielomianem spełniającym warunki zadania jest  $W(x) = 3x^5 - 8x^4 + 6x^3$ .

**613.** Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

*Rozwiązanie:*

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja  $f$  była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $-1$ , muszą zachodzić warunki

$$W(-1) = -1 \quad \text{oraz} \quad W'(-1) = W''(-1) = 0.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji  $f$  w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad W'(1) = W''(1) = 0,$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} -a + b - c + d - e + g = -1 \\ a + b + c + d + e + g = 1 \\ 5a - 4b + 3c - 2d + e = 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d + e = 0 \\ -20a + 12b - 6c + 2d = 0 \\ 20a + 12b + 6c + 2d = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b+d+g = 0 \\ 2b+d = 0 \\ 6b+d = 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy  $b=d=g=0$ . W konsekwencji układ równań (1) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a+c+e = 1 \\ 5a+3c+e = 0 \\ 10a+3c = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest  $a=3/8$ ,  $c=-5/4$ ,  $e=15/8$ .

**Odpowiedź:** Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x) = \frac{3x^5 - 10x^3 + 15x}{8}.$$

**614.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru  $A$  istnieje  $f'(0)$  i ile jest równa?

b) Dla tej samej wartości parametru  $A$  wyznaczyć  $f''(0)$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - 1}{h} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - A \cdot h}{h^2}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - A}{2h}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy iloraz  $\frac{1-A}{0}$ , co ma postać nieoznaczoną  $\frac{0}{0}$  dla  $A=1$ . Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}.$$

W celu obliczenia pochodnej drugiego rzędu w zerze musimy najpierw obliczyć pierwszą pochodną poza zerem:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}.$$

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h \cdot h - e^h + 1}{h^2} - 1/2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h - e^h + 1 - \frac{h^2}{2}}{h^3}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h + e^h - e^h - h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h - h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{3h}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc ponownie zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Odpowiedź:** Funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla  $A = 1$  i wówczas  $f'(0) = 1/2$  oraz  $f''(0) = 1/3$ .

**615.** Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ . Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią  $C$ , że dla każdych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

*Rozwiązanie:*

Pominąwszy trywialny przypadek  $x = y$ , z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie  $c$  leży pomiędzy  $x$  i  $y$ .

Zatem najmniejsza stała  $C$ , z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru  $\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ .

Obliczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^{-1/3}}{3 \cdot (1 + 2 \cdot x^{-2})^{2/3}} = 0.$$

Ponadto

$$f''(x) = \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się  $f''$ :

$$\frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} = \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}},$$

$$3 \cdot (x^2 + 2) = 4x^2,$$

$$6 = x^2,$$

$$x = \pm\sqrt{6}.$$

Wyliczamy wartości funkcji  $f'$  w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(\pm\sqrt{6}) = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot \left( (\pm\sqrt{6})^2 + 2 \right)^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 8^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Stąd wynika, że funkcja  $f'$  przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio  $-1/\sqrt{6}$  i  $1/\sqrt{6}$ , a zatem  $C = 1/\sqrt{6}$ .

**616.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = x^5 + x.$$

Podać dwie pary liczb  $(n, w)$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a  $w$  liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n) = w.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby  $w$  jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$$f''(2) = -\frac{20}{6^3} = -\frac{20}{216} = -\frac{5}{54} \qquad f''(34) = -\frac{160}{81^3} = -\frac{160}{3^{12}}$$

**617.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji  $f$  w trzech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = -1/4 \qquad f''\left(\frac{14}{3}\right) = -4/125 \qquad f''(12) = -3/500$$

**618.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji  $f$  w czterech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{7}{3}\right) = -2/27 \qquad f''\left(\frac{20}{3}\right) = -1/54 \qquad f''(15) = -6/1331 \qquad f''\left(\frac{88}{3}\right) = -1/729$$

**619.** Niech

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3,01) = f(301/100) \approx \mathbf{2,003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000} = 2 + \frac{27}{8000} = \mathbf{2,003375}$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{3x^2}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6x}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{30x \cdot (x^3 + 5)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \\ &= \frac{30x^4 + 150x - 36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{150x - 6x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{6x \cdot (25 - x^3)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} < 0 \end{aligned}$$

dla  $x > \sqrt[3]{25}$ , skąd wynika, że funkcja  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $[\sqrt[3]{25}, \infty)$ , zawierającym przedział  $[\sqrt[3]{27}, \infty) = [3, \infty)$ .

Zatem wykres funkcji  $f$  dla  $x > 3$  leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie odpowiadającym  $x=3$ . Ponieważ  $f(3)=2$  oraz  $f'(3)=27/80$ , dla  $x > 3$  zachodzi nierówność

$$f(x) < 2 + \frac{27 \cdot (x-3)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(3,01) < 2 + \frac{27 \cdot 0,01}{80} = 2 + \frac{27}{8000}.$$

**Odpowiedź:** Wartość  $f(3,01)$  jest mniejsza od  $16027/8000$ .

**620.** Niech

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(2,1) = f(21/10) \approx \mathbf{3,30}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{89}{27} = 3 + \frac{8}{27} \approx \mathbf{3,30}$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{5x^4}{3 \cdot (x^5 - 5)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{20x^3}{3 \cdot (x^5 - 5)^{2/3}} - \frac{50x^8}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} = \frac{60x^3 \cdot (x^5 - 5)}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} - \frac{50x^8}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} =$$

$$\frac{60x^8 - 300x^3 - 50x^8}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} = \frac{10x^8 - 300x^3}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} = \frac{10x^3 \cdot (x^5 - 30)}{9 \cdot (x^5 - 5)^{5/3}} > 0$$

dla  $x > \sqrt[5]{30}$ , skąd wynika, że funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w przedziale  $[\sqrt[5]{30}, \infty)$ , zawierającym przedział  $[\sqrt[5]{32}, \infty) = [2, \infty)$ .

Zatem wykres funkcji  $f$  dla  $x > 2$  leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie odpowiadającym  $x=2$ . Ponieważ  $f(2)=3$  oraz  $f'(2)=80/27$ , dla  $x > 2$  zachodzi nierówność

$$f(x) > 3 + \frac{80 \cdot (x-2)}{27}$$

i w konsekwencji

$$f(2,1) > 3 + \frac{80 \cdot 0,1}{27} = 3 + \frac{8}{27}.$$

**Odpowiedź:** Wartość  $f(2,1)$  jest większa od  $89/27$ .

**621.** Niech

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(4,08) \approx \mathbf{2,36}$$

jest mniejsza czy większa od

$$f(4) + 0,027 \approx \mathbf{2,36}$$

*Rozwiązanie:*

Różniczkując funkcję  $f$  otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{3x^2}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{6x}{5 \cdot (x^3 + 5)^{4/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{30x \cdot (x^3 + 5)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} - \frac{36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} =$$

$$\frac{30x^4 + 150x - 36x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{150x - 6x^4}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} = \frac{6x \cdot (25 - x^3)}{25 \cdot (x^3 + 5)^{9/5}} < 0$$

dla  $x > \sqrt[3]{25}$ , skąd wynika, że funkcja  $f$  jest ściśle wklęsła w przedziale  $[\sqrt[3]{25}, \infty)$ , zawierającym przedział  $[\sqrt[3]{27}, \infty) = [3, \infty)$ , a funkcja  $f'$  jest w tym przedziale malejąca.

Zatem wykres funkcji  $f$  dla  $x > 4$  leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie odpowiadającym  $x = 4$ . Ponieważ  $f'(4) < f'(3) = 27/80$ , dla  $x > 4$  zachodzą nierówności

$$f(x) < f(4) + f'(4) \cdot (x - 4) < f(4) + \frac{27 \cdot (x - 4)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(4,08) < f(4) + \frac{27 \cdot 0,080}{80} = f(4) + 0,027.$$

**Odpowiedź:** Wartość  $f(4,08)$  jest mniejsza od  $f(4) + 0,027$ .

**622.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna oraz  $f''(x) \geq 1$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(x-y)^2}{8}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozważmy funkcję pomocniczą  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określoną wzorem

$$g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}.$$

Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  otrzymujemy

$$g''(x) = f''(x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

skąd wynika, że  $g$  jest funkcją wypukłą. Wobec tego dla każdych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$\frac{g(x) + g(y)}{2} \geq g\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

co po wykorzystaniu definicji funkcji  $g$  daje kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - \frac{x^2}{2} + f(y) - \frac{y^2}{2}}{2} &\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{2}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{x^2 + y^2}{4} &\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{(x+y)^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{2x^2 + 2y^2}{8} - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{8}, \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(x-y)^2}{8}, \end{aligned}$$

co należało dowieść.

Wstawić znak " $<$ " albo " $>$ " i udowodnić powstałą nierówność:

**631.**  $e^x > 1+x$  dla  $x > 0$

**632.**  $e^x < 1+2x$  dla  $0 < x < 1$

**633.**  $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$  dla  $x > 0$

**634.**  $e^x < 1+x+x^2$  dla  $0 < x < 1$

**635.**  $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$  dla  $x > 0$

**636.**  $\ln(x+1) < x$  dla  $x > 0$

**637.**  $\ln(x+1) > x-\frac{x^2}{2}$  dla  $x > 0$

**638.**  $\ln(x+1) < x$  dla  $-1 < x < 0$

**639.**  $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}$  dla  $-1 < x < 0$

**640.**  $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$  dla  $x > 0$

**641.**  $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$  dla  $-1 < x < 0$

**642.**  $\ln(x+1) > \frac{x}{2}$  dla  $0 < x < 2$

**643.**  $\operatorname{arctg} x < x$  dla  $x > 0$

**644.**  $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi x}{4}$  dla  $0 < x < 1$

**645.**  $\sin x < x$  dla  $x > 0$

**646.**  $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$  dla  $x > 0$

**647.**  $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$  dla  $x > 0$

**648.**  $\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$  dla  $x > 0$

**649.**  $\sin x > \frac{2x}{\pi}$  dla  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

**650.**  $\sin x > \frac{3x}{\pi}$  dla  $0 < x < \frac{\pi}{6}$