**Kolokwium nr 6:** środa 17.01.2024, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 1–650.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 9.01.$\binom{4!}{3}$, piątek 12.01.$\binom{4!}{3}$ i wtorek 16.01.$\binom{4!}{3}$.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!**

**Zadania podobne do wcześniej rozwiązanych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.**

## 12. Pochodna drugiego rzędu i wypukłość funkcji.

**601.** Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16)+f(18) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(17)\ ?$$

**602.** Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\ln x-\sqrt[3]{x}\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89)+f(91) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(90)\ ?$$

**603.** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61)+f(63) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(62)\ ?$$

**604.** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65)+f(67) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(66)\ ?$$

**605.** Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106 \quad \text{czy} \quad 6\cdot\operatorname{arctg} 104\ ?$$

**606.** Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg} 5+2\cdot\ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3+\ln 5+2\cdot\operatorname{arctg} 4\,.$$

**607.** Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}\,,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6)+f(8) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(7)\ ?$$

**608.** Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\,,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79)+f(81)=\mathbf{39{,}79911}...\quad \text{czy} \quad 2\cdot f(80)=\mathbf{39{,}79911}...\ ?$$

**609.** Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-10\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600)+f(1602)=-\mathbf{67{,}54267816}...\quad \text{czy} \quad 2\cdot f(1601)=-\mathbf{67{,}54267816}...\ ?$$

**610.** Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2+432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36{,}001)=f(36001/1000)\approx\mathbf{12{,}0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000}=12+\frac{1}{6000}\approx\mathbf{12{,}0001666666667}\,.$$

**611.** Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3}<n^{2n}\cdot(n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n>0$.

**612.** Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0 \\ W(x) & \text{dla} \quad 0<x<1 \\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

**613.** Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x\leqslant -1 \\ W(x) & \text{dla} \quad -1<x<1 \\ 1 & \text{dla} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

**614.** Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

**a)** Dla której wartości parametru $A$ istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
**b)** Dla tej samej wartości parametru $A$ wyznaczyć $f''(0)$.

**615.** Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią $C$, że dla każdych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y| .$$

**616.** Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=x^5+x .$$

Podać dwie pary liczb $(n, w)$, gdzie $n$ jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a $w$ liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n)=w .$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby $w$ jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$f''(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $f''(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

**617.** Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+x .$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji $f$ w trzech podanych punktach.

$f''\left(\frac{4}{3}\right)=\ldots\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{14}{3}\right)=\ldots\ldots\ldots$ $f''(12)=\ldots\ldots\ldots$

**618.** Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+2x .$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji $f$ w czterech podanych punktach.

$f''\left(\frac{7}{3}\right)=\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{20}{3}\right)=\ldots\ldots$ $f''(15)=\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{88}{3}\right)=\ldots\ldots$

**619.** Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5} .$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3,01)=f(301/100)\approx\mathbf{2,003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000}=2+\frac{27}{8000}=\mathbf{2,003375}$$

**620.** Niech
$$f(x)=\sqrt[3]{x^5-5}\,.$$
Rozstrzygnąć, czy liczba
$$f(2,1)=f(21/10)\approx\mathbf{3,30}$$
jest mniejsza czy większa od
$$\frac{89}{27}=3+\frac{8}{27}\approx\mathbf{3,30}$$

**621.** Niech
$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$
Rozstrzygnąć, czy liczba
$$f(4,08)\approx\mathbf{2,36}$$
jest mniejsza czy większa od
$$f(4)+0,027\approx\mathbf{2,36}$$

**622.** Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x)\geqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność
$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{(x-y)^2}{8}\,.$$

Wyznaczyć punkty przegięcia i przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji zmiennej $x$ danej wzorem:

**623.** $x^3+2x^2+3x+4$ **624.** $x^8-x^2+7x-15$ **625.** $e^{-x^2}$ **626.** $\sin^4 x$ **627.** $x^4+\sqrt[4]{x}$

**628.** Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
LEMAT: Niech $a$ będzie liczbą rzeczywistą i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$.
Jeżeli dla każdego $x>a$ zachodzi nierówność $f'(x)<g'(x)$, to dla dowolnego $x>a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x<a$ zachodzi nierówność $f'(x)<g'(x)$, to dla dowolnego $x<a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

**629.** Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
LEMAT: Niech $a$ będzie liczbą rzeczywistą i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$ oraz $f'(a)=g'(a)$.
Jeżeli dla każdego $x>a$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x>a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x<a$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x<a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

**630.** Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
Lemat: Niech $a<b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$ oraz $f(b)=g(b)$.
Jeżeli dla każdego $x\in(a,\,b)$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x\in(a,\,b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x\in(a,\,b)$ zachodzi nierówność $f''(x)>g''(x)$, to dla dowolnego $x\in(a,\,b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

Wstawić znak "$<$" albo "$>$" i udowodnić powstałą nierówność:

**631.** $e^x$ .......... $1+x$ dla $x>0$

**632.** $e^x$ .......... $1+2x$ dla $0<x<1$

**633.** $e^x$ .......... $1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

**634.** $e^x$ .......... $1+x+x^2$ dla $0<x<1$

**635.** $e^x$ .......... $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

**636.** $\ln(x+1)$ .......... $x$ dla $x>0$

**637.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

**638.** $\ln(x+1)$ .......... $x$ dla $-1<x<0$

**639.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

**640.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

**641.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

**642.** $\ln(x+1)$ .......... $\frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

**643.** $\operatorname{arctg} x$ .......... $x$ dla $x>0$

**644.** $\operatorname{arctg} x$ .......... $\frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

**645.** $\sin x$ .......... $x$ dla $x>0$

**646.** $\cos x$ .......... $1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

**647.** $\sin x$ .......... $x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

**648.** $\cos x$ .......... $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

**649.** $\sin x$ .......... $\frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$

**650.** $\sin x$ .......... $\frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$