Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 5.01.$\binom{4!}{3}$.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Omawianie należy rozpocząć od zadania 577.

11. Pochodne wyższych rzędów.

Operacja różniczkowania przypisuje funkcji f jej pochodną f'. Jeżeli dziedzina pochodnej nie jest zbyt zdegenerowana[1], możemy do pochodnej ponownie zastosować operację różniczkowania otrzymując pochodną pochodnej funkcji f. Tak otrzymaną funkcję nazywamy drugą pochodną lub pochodną drugiego rzędu funkcji f i oznaczamy przez f''. Taką zabawę można kontynuować dalej różniczkując funkcję f'' i otrzymując trzecią pochodną[2] f'''.

Możemy więc napisać

$$(f')' = f'' \qquad \text{oraz} \qquad (f'')' = f'''$$

lub

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right) = \frac{d^2\,f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2\,f(x)}{dx^2} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3\,f(x)}{dx^3}\,.$$

Na przykład dla funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^{10}$ mamy

$$f'(x) = 10x^9\,, \qquad f''(x) = 90x^8 \qquad \text{oraz} \qquad f'''(x) = 720x^7\,.$$

W podobny sposób możemy zdefiniować[3] pochodną dowolnego rzędu[4] naturalnego n jako efekt n-krotnego różniczkowania funkcji. Przy tym pochodne rzędu wyższego niż trzeci lub pochodne o rzędzie, który nie jest konkretną liczbą, zapisujemy w postaci $f^{(n)}$. Tak więc czwartą pochodną funkcji f zapiszemy[5] jako $f^{(4)}$.

Możemy więc przyjąć następującą definicję rekurencyjną

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

lub w innym zapisie

$$\frac{d^{n+1}\,f(x)}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n\,f(x)}{dx^n}\right)\,.$$

W uzupełnieniu do tej definicji przyjmujemy, że funkcja jest swoją pochodną zerowego rzędu. Oczywiście pisanie $f^{(0)}$ zamiast f nie ma praktycznego sensu, ale użycie zapisu $f^{(n)}$ w kontekście n mogącego przyjmować wartość 0 będzie przez nas w przyszłości stosowane.

[1]Formalnie rzecz biorąc, to różniczkować możemy nawet funkcję, która w żadnym punkcie nie jest różniczkowalna – po prostu jej pochodna jest funkcją o pustej dziedzinie i owa pochodna ma kolejną pochodną o pustej dziedzinie. Jednak chodzi nam tutaj nie o formalistyczne niuanse, a o różniczkowanie, które prowadzi do czegoś interesującego.

[2]Przypominam, że f' czytamy jako "ef prim". Z kolei f'' czytamy jako "ef bis", a f''' jako "ef ter".

[3]To, że je sobie zdefiniujemy, nie oznacza jeszcze, że dla każdej funkcji będą istniały.

[4]Możemy też powiedzieć: n-ta pochodna.

[5]Jeśli ktoś bardzo mocno chce zapisać takie pochodne w notacji prim-bis-ter, to nie zapisujemy tych pochodnych dodając kolejne primy, ale imitując zapis rzymski z małymi literami. Nie napiszemy więc f'''', ale f^{iv}, przy czym zapis taki jest na tyle rzadko stosowany, że nie ma ustalonych reguł co do ewentualnego stawiania kropki nad "i".

W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

563. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $f_1'(25)=\dots\dots\dots$, $f_1''(25)=\dots\dots\dots$, $f_1'''(25)=\dots\dots\dots$

564. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $f_2'(1/4)=\dots\dots\dots$, $f_2''(1/4)=\dots\dots\dots$, $f_2'''(1/4)=\dots\dots\dots$

565. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $f_3'(4)=\dots\dots\dots$, $f_3''(4)=\dots\dots\dots$, $f_3'''(4)=\dots\dots\dots$

566. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $f_4'(1)=\dots\dots\dots$, $f_4''(1)=\dots\dots\dots$, $f_4'''(1)=\dots\dots\dots$

567. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27)=\dots\dots$, $f_5''(1/27)=\dots\dots$, $f_5'''(1/27)=\dots\dots$

568. $f_6(x)=\ln x$ $f_6'(2)=\dots\dots\dots$, $f_6''(2)=\dots\dots\dots$, $f_6'''(2)=\dots\dots\dots$

569. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $f_7'(1)=\dots\dots\dots$, $f_7''(1)=\dots\dots\dots$, $f_7'''(1)=\dots\dots\dots$

570. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_8'(1)=\dots\dots\dots$, $f_8''(1)=\dots\dots\dots$, $f_8'''(1)=\dots\dots\dots$

571. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_9'(2)=\dots\dots\dots$, $f_9''(2)=\dots\dots\dots$, $f_9'''(2)=\dots\dots\dots$

572. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_{10}'(3)=\dots\dots\dots$, $f_{10}''(3)=\dots\dots\dots$, $f_{10}'''(3)=\dots\dots\dots$

W każdym z kolejnych 4 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

573. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\dots\dots\dots$ $f_1^{(4)}(2)=\dots\dots\dots$ $f_1^{(4)}(3)=\dots\dots\dots$

574. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dots\dots\dots$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dots\dots\dots$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dots\dots\dots$

575. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\dots\dots\dots$ $f_3^{(4)}(4)=\dots\dots\dots$ $f_3^{(4)}(12)=\dots\dots\dots$

576. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\dots\dots\dots$ $f_4^{(4)}(3)=\dots\dots\dots$ $f_4^{(4)}(8)=\dots\dots\dots$

577. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=e^x\cdot\sin x\,.$$

Otrzymany wzór powienien mieć prostą postać, bez znaku "$\sum$", z co najwyżej dwoma znakami "+" i co najwyżej dwoma znakami "−".

578. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych $(a,\,b)$, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=e^{ax}\cdot\cos(bx)$$

jest równa swojej pochodnej trzeciego rzędu.

579. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2022 funkcji

$$f(x)=e^x\sin\left(x\sqrt{3}\right)\,.$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "$\sum$", "+", "−".

580. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2022 funkcji

$$f(x)=e^x\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "$\sum$", "+", "−".

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem[6]:

581. $\ln(x^{10})$ **582.** $\sqrt{x}$ **583.** $\sqrt[3]{x}$ **584.** e^{4x} **585.** xe^x

586. $\sin 5x$ **587.** $\sin^2 x$ **588.** $x^2\ln x$ **589.** $\ln\left(x^2-1\right)$ **590.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

591. $\dfrac{1}{x}$ **592.** $\dfrac{1}{(x+a)^2}$ **593.** $\dfrac{1}{(x+2023)^{2023}}$ **594.** $\dfrac{1}{x^2+x}$

595. $\dfrac{1}{x^2-1}$ **596.** $\dfrac{1}{x^3-x}$ **597.** $\dfrac{1}{x^5-5x^3+4x}$ **598.** $\dfrac{1}{x^4+2x^3+x^2}$

599. Dowieść, że

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{x^2}=W_n(x)\cdot e^{x^2}\,,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n. Wyprowadzić wzór na $W_{n+1}(x)$ w zależności od $W_n(x)$.

600. Dowieść, że

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{x^7}=W_n(x)\cdot e^{x^7}\,,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia $6n$. Wyprowadzić wzór na $W_{n+1}(x)$ w zależności od $W_n(x)$. Dowieść, że $W_n(x)$ ma postać $V_n\left(x^7\right)\cdot x^{k_n}$, gdzie $k_n\in\{0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$.

[6]Wskazówka do niektórych zadań: rozłożyć funkcję na sumę wyrażeń postaci $\dfrac{c}{x+a}$ lub $\dfrac{c}{(x+a)^2}$.