501. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 < \frac{1}{1201}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[49, 51]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (49, 51)$, że

$$\operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 = (51-49) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $49 < c < 51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301} = \frac{2}{2602} = \frac{2}{51^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 = \frac{2}{c^2+1} \quad < \quad \frac{2}{49^2+1} = \frac{2}{2402} = \frac{1}{1201}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

502. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[8, 9]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 9)$, że

$$\ln 9 - \ln 8 = f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,,$$

z nierówności $8 < c < 9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{9} \quad < \quad \ln 9 - \ln 8 = f'(c) = \frac{1}{c} \quad < \quad \frac{1}{8}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

503. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{34} < \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 < \frac{1}{13}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[8, 13]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 13)$, że

$$\operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 = (13-8) \cdot f'(c) = 5 \cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $8 < c < 13$ otrzymujemy

$$\frac{1}{34}=\frac{5}{170}=\frac{5}{13^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 13-\operatorname{arctg} 8=\frac{5}{c^2+1} \quad < \quad \frac{5}{8^2+1}=\frac{5}{65}=\frac{1}{13},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

504. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12<\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (oficjalny):

Podana nierówność może być przepisana w postaci

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziałach $[6,7]$ oraz $[10,12]$ wynika istnienie takich liczb $c\in(6,7)$ oraz $d\in(10,12)$, że

$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6=f'(c)\,.$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10=2\cdot f'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $6<c<7$ oraz $10<d<12$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{50} \quad < \quad \operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6=f'(c)=\frac{1}{c^2+1} \quad < \quad \frac{1}{37}$$

oraz

$$\frac{2}{145} \quad < \quad \operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10=2\cdot f'(d)=\frac{2}{d^2+1} \quad < \quad \frac{2}{101}\,.$$

W konsekwencji

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10<\frac{2}{101}<\frac{2}{100}=\frac{1}{50}<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Sposób II (rachunkowy):

Niech

$$f(x)=\operatorname{arctg}(6+x)+\operatorname{arctg}(12-2x)$$

będzie funkcją, która dla $x=0$ i $x=1$ przyjmuje wartości równe odpowiednio lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0,1)$, a do tego wystarczy wykazać dodatniość jej pochodnej na tym przedziale. Miłośnicy rachunków bez trudu stwierdzą, że

$$f'(x)=\frac{1}{(6+x)^2+1}+\frac{-2}{(12-2x)^2+1}=\frac{2x^2-72x+71}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-68x+2+68+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=\frac{2\cdot(x-1)^2+68\cdot(1-x)+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}\,,$$

co wobec dodatniości ostatniego wyrażenia dla $x \leqslant 1$ kończy rozwiązanie zadania.

Sposób III (wymaga znajomości pewnej sztuczki):

Skorzystamy z tego, że $\operatorname{arctg} x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ix$ oraz z faktu, że przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

Wobec tego $\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12$ jest argumentem liczby

$$(1+6i)\cdot(1+12i)=1+18i-72=-71+18i=71\cdot\left(-1+\frac{18}{71}\cdot i\right),$$

natomiast $\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10$ jest argumentem liczby

$$(1+7i)\cdot(1+10i)=1+17i-70=-69+17i=69\cdot\left(-1+\frac{17}{69}\cdot i\right).$$

Zatem lewa i prawa strona dowodzonej nierówności są równe odpowiednio argumentom liczb

$$-1+\frac{18}{71}\cdot i \qquad \text{oraz} \qquad -1+\frac{17}{69}\cdot i\,.$$

Wobec tego dowodzona nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{18}{71}>\frac{17}{69}\,,$$

którą możemy wykazać następująco:

$$\frac{18}{71}>\frac{18}{72}=\frac{1}{4}=\frac{17}{68}>\frac{17}{69}\,.$$

Uwagi: Ponieważ argumentem liczby zespolonej $-1+\frac{1}{4}\cdot i=-\left(1-\frac{1}{4}\cdot i\right)$ jest liczba

$$\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 4\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} 4\,,$$

faktycznie udowodniliśmy nierówności

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12<\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} 4<\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10\,.$$

Zwróćmy też uwagę, że postępując podobnie jak powyżej, strony dowodzonej nierówności można zapisać jako:

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{71}{18}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4-\frac{1}{18}\right)$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{69}{17}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4+\frac{1}{17}\right).$$

Metodami podobnymi do powyższych można udowodnić nierówności równoważne danej w zadaniu nierówności:

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10=\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{121}\right)<\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{86}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{43}\right)=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6\,,$$

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 7=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{17}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{68}\right)<\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{61}\right)=\operatorname{arctg} 10-\operatorname{arctg} 6$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10-\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 6=\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{1041}\right)>0\,.$$

505. Udowodnić nierówność
$$26\cdot e^{\operatorname{arctg} 5}<25\cdot e^{\operatorname{arctg} 7}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowowdzona nierówność po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e przyjmuje postać
$$\ln 26+\operatorname{arctg} 5<\ln 25+\operatorname{arctg} 7\,,$$
co można przepisać jako
$$\ln 26-\ln 25<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5\,.$$
Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[25, 26]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(25, 26)$, że
$$\ln 26-\ln 25=(26-25)\cdot f'(c)=f'(c)\,.$$
Ponadto z twierdzenia Lagrange'a zastosowanego do funkcji $g(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziale $[5, 7]$ wynika istnienie takiej liczby $d\in(5, 7)$, że
$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5=(7-5)\cdot g'(d)=2\cdot g'(d)\,.$$
Ponieważ
$$f'(x)=\frac{1}{x}$$
oraz
$$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$
z nierówności $25<c<26$ oraz $5<d<7$ otrzymujemy odpowiednio
$$\frac{1}{26}\quad<\quad\ln 26-\ln 25=f'(c)=\frac{1}{c}\quad<\quad\frac{1}{25}$$
oraz
$$\frac{1}{25}=\frac{2}{50}\quad<\quad\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5=2\cdot g'(d)=\frac{2}{d^2+1}\quad<\quad\frac{2}{26}=\frac{1}{13}\,.$$
W konsekwencji
$$\ln 26-\ln 25<\frac{1}{25}<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5\,,$$
co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

506. Dana jest funkcja $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+\pi}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość
$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\left(x^\pi+\pi\right)^{1/\pi-1}\cdot \pi x^{\pi-1}\right| = \frac{x^{\pi-1}}{\left(x^\pi+\pi\right)^{1-1/\pi}} = \frac{x^{\pi-1}}{\left(x^\pi+\pi\right)^{(\pi-1)/\pi}} = \frac{\left(x^\pi\right)^{(\pi-1)/\pi}}{\left(x^\pi+\pi\right)^{(\pi-1)/\pi}} =$$

$$= \left(\frac{x^\pi}{x^\pi+\pi}\right)^{(\pi-1)/\pi} < 1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

507. Dana jest funkcja $f:[-10,\,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{10x^2+9000}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{10x}{\sqrt{10x^2+9000}}\right| = \frac{10\cdot|x|}{\sqrt{10x^2+9000}} = \frac{10}{\sqrt{10+\frac{9000}{x^2}}} \leqslant \frac{10}{\sqrt{10+\frac{9000}{10^2}}} = \frac{10}{\sqrt{10+90}} = \frac{10}{10} = 1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

508. Dana jest funkcja $f:[-10,\,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{5x^2+125}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 2\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 2\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{5x}{\sqrt{5x^2+125}}\right|=\frac{5\cdot|x|}{\sqrt{5x^2+125}}=\frac{5}{\sqrt{5+\frac{125}{x^2}}}\leqslant\frac{5}{\sqrt{5+\frac{125}{10^2}}}=\frac{5}{\sqrt{6,25}}=\frac{5}{2,5}=2\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

509. Dana jest funkcja $f:[-1,\,1]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{2x^2+2}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-1,\,1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\ .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\ ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-1,\,1]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1\,.$$

Dla $x=0$ powyższa nierówność jest oczywista wobec $f'(0)=0$, a dla $x\neq 0$ bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 1$ prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}\right|=\frac{2\cdot|x|}{\sqrt{2x^2+2}}=\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{x^2}}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{1^2}}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

510. Dana jest funkcja $f:[-4,\,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+9}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-4,\,4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\ .$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-4,\,4]$ zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\ .$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|=\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} \leqslant \frac{4}{5}\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y| \leqslant \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right)\,.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2 \leqslant 16$ i $y^2 \leqslant 16$:

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| = \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9y^2}{25}+\frac{16y^2}{25}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{9\cdot 16}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9\cdot 16}{25}+\frac{16y^2}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}\cdot(x^2+9)}+\sqrt{\frac{16}{25}\cdot(y^2+9)} =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right)\,.$$

Sposób II:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y|\,,$$

gdzie c leży między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby $x \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{5}\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}\,,$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x \neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5}\,.$$

511. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x)=\frac{1}{x^4}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{256}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\,y\geqslant 4$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{x^4y^4}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^3}{x^4y^4}+\frac{x^2y}{x^4y^4}+\frac{xy^2}{x^4y^4}+\frac{y^3}{x^4y^4}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^4}+\frac{1}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}\right)=|x-y|\cdot\frac{4}{4^5}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\,y\geqslant 4$.

Nieco inna postać oszacowań:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x+y)\cdot(x^2+y^2)}{x^4y^4}=|x-y|\cdot\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^3y^3}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,.$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x=y$, natomiast dla $x\neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y, a więc spełniająca nierówność $c>4$, że

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|=\left|\frac{-4}{c^5}\right|=\frac{4}{c^5}<\frac{4}{4^5}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

512. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x, co dowodzimy następująco:

$$|f'(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=\frac{|e^x-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}\leqslant\frac{|e^x|+|-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1.$$

513. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością między średnimi geometryczną i arytmetyczną prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{\sqrt{x^2\cdot 1}}{\frac{x^2+1}{2}}\leqslant 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

514. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-3\cdot|x+1|$$

na przedziale $[-2,2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1,+\infty) \\ -x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x-3 & \text{dla} \quad x\in[-1,2] \\ x^2+3x+3 & \text{dla} \quad x\in[-2,-1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2,2]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{dla} \quad x\in(-1,2) \\ 2x+3 & \text{dla} \quad x\in(-2,-1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1,2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-3=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1,2)$.

2° W przypadku $x\in(-2,-1)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+3=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2,-1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -2 i 2,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1.

$$f(-2)=1\,,$$
$$f(-3/2)=3/4\,,$$
$$f(-1)=1\,,$$
$$f(3/2)=-21/4=-5,25\,,$$
$$f(2)=-5\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-21/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą 1 w punktach -2 oraz -1.

515. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$
na przedziale $[-4,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$\left|x^2-6\right|=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } x\in\left(-\infty,-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},+\infty\right) \\ -x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right) \end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x+x^2-6 & \text{dla } x\in\left[-4,-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},3\right] \\ x-x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4,3]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{dla } x\in\left(-4,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},3\right) \\ 1-2x & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in\left(-4,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},3\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $\left(-4,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},3\right)$.

2° W przypadku $x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1/2$, które należy do rozważanego przedziału $\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -4 i 3,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$f(-4)=6\,,$$
$$f\left(-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{6}\,,$$
$$f(1/2)=6,25\,,$$
$$f\left(\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}\,,$$
$$f(3)=6\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25=25/4$ w punkcie $1/2$.

516. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-x-6\right|$$

na przedziale $[-5,\,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2-x-6=(x-3)\cdot(x+2)\,.$$

Stąd

$$\left|x^2-x-6\right|=\begin{cases} x^2-x-6 & \text{dla } \ x\in(-\infty,\,-2]\cup[3,\,+\infty) \\ -x^2+x+6 & \text{dla } \ x\in(-2,\,3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } \ x\in[-5,\,-2]\cup[3,\,5] \\ -x^2+2x+6 & \text{dla } \ x\in(-2,\,3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5,\,5]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla } \ x\in(-5,\,-2)\cup(3,\,5) \\ -2x+2 & \text{dla } \ x\in(-2,\,3) \end{cases}$$

W punktach -2 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-5,\,-2)\cup(3,\,5)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x=0$, co ma rozwiązanie $x=0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5,\,-2)\cup(3,\,5)$.

2° W przypadku $x\in(-2,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-2,\,3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -2 i 3.

$$f(-5)=19\,,$$
$$f(-2)=-2\,,$$
$$f(1)=7\,,$$
$$f(3)=3\,,$$
$$f(5)=19\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie -2, a wartość największą równą 19 w punktach -5 i 5.

517. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-\sqrt{4x^2+4x+1}$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2, +\infty) \\ -2x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, -1/2) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2, 3] \\ x^2+2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-3, -1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{dla} \quad x\in(-1/2, 3) \\ 2x+2 & \text{dla} \quad x\in(-3, -1/2) \end{cases}$$

W punkcie $-1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/2, 3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/2, 3)$.

2° W przypadku $x\in(-3, -1/2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=-1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, -1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -3 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: -1 i 1,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/2$.

$$f(-3)=4\,,$$
$$f(-1)=0\,,$$
$$f(-1/2)=1/4=0,25\,,$$
$$f(1)=-2\,,$$
$$f(3)=2\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie 1, a wartość największą równą 4 w punkcie -3.

518. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2$$
na przedziale $[-2,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2=\sqrt{(3x+1)^2}-x^2=|3x+1|-x^2$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} 3x+1-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-1/3,3] \\ -3x-1-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-2,-1/3) \end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2,3]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{dla} \quad x\in(-1/3,3) \\ -3-2x & \text{dla} \quad x\in(-2,-1/3) \end{cases}$$
W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/3,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3,3)$.

2° W przypadku $x\in(-2,-1/3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2,-1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -2 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2)=1\,,$$
$$f(-3/2)=5/4\,,$$
$$f(-1/3)=-1/9\,,$$
$$f(3/2)=13/4\,,$$
$$f(3)=1\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/9$ w punkcie $-1/3$, a wartość największą równą $13/4$ w punkcie $3/2$.

519. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$
na przedziale $\left[-4,\sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$x^3-9x=(x-3)\cdot x\cdot(x+3)\,.$$
Stąd
$$\left|x^3-9x\right|=\begin{cases} x^3-9x & \text{dla} \quad x\in[-3,\,0]\cup[3,\,+\infty) \\ -x^3+9x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-3)\cup\in(0,\,3)\end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x & \text{dla} \quad x\in[-3,\,0]\cup\left[3,\,\sqrt{10}\right] \\ -x^3+12x & \text{dla} \quad x\in[-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)\end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $\left[-4,\,\sqrt{10}\right]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6 & \text{dla} \quad x\in(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right) \\ -3x^2+12 & \text{dla} \quad x\in(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)\end{cases}$$
W punktach -3, 0 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=6$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=-\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right)$.

2° W przypadku $x\in(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=12$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=2$, należy do rozważanego zbioru $(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:
- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3, 0 i 3.

$$f(-4)=16\,,\qquad f(-3)=-9\,,\qquad f(0)=13\,,\qquad f(2)=16\,,\qquad f(3)=9\,,$$
$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^3+6\cdot\sqrt{2}=-2\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}\in(4,\,8),\quad \text{bo} \quad \sqrt{2}\in(1,\,2)\,,$$
$$f\left(\sqrt{10}\right)=\left(\sqrt{10}\right)^3-6\cdot\sqrt{10}=10\cdot\sqrt{10}-6\cdot\sqrt{10}=4\cdot\sqrt{10}\in(12,\,16),\quad \text{bo} \quad \sqrt{10}\in(3,\,4)\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3, a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2.

520. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}$$
na przedziale $[-11,\,9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}=2x+\sqrt{\left(x^2-49\right)^2}=2x+\left|x^2-49\right|\,, \tag{1}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 2x+x^2-49 & \text{dla} \quad x\in[-11,\,-7]\cup[7,\,9] \\ 2x-x^2+49 & \text{dla} \quad x\in(-7,\,7) \end{cases} \tag{2}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-11,\,9]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2+2x & \text{dla} \quad x\in(-11,\,-7)\cup(7,\,9) \\ 2-2x & \text{dla} \quad x\in(-7,\,7) \end{cases} \tag{3}$$

W punktach ± 7 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-11,\,-7)\cup(7,\,9)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1$, które **nie należy** do rozważanego zbioru $(-11,\,-7)\cup(7,\,9)$.

2° W przypadku $x\in(-7,\,7)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które **należy** do rozważanego przedziału $(-7,\,7)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -11 i 9,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -7 i 7.

$$f(-11)=50\,,$$
$$f(-7)=-14\,,$$
$$f(1)=50\,,$$
$$f(7)=14\,,$$
$$f(9)=50\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -14 w punkcie -7, a wartość największą równą 50 w punktach -11, 1 i 9.

521. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln\left(x^2+1\right)}{99}+\operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,\,11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=\frac{1}{99}-\frac{10\cdot 2x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{99\cdot(x^2+1)}-\frac{20x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{99}{99\cdot(x^2+1)}=$$
$$=\frac{x^2-20x+100}{99\cdot(x^2+1)}=\frac{(x-10)^2}{99\cdot(x^2+1)}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(9)=\frac{1}{11}-\frac{10\cdot\ln 82}{99}+\mathrm{arctg}\,9\approx\mathbf{1{,}10592}5\,,$$
$$f(10)=\frac{10}{99}-\frac{10\cdot\ln 101}{99}+\mathrm{arctg}\,10\approx\mathbf{1{,}10596}4\,,$$
$$f(11)=\frac{1}{9}-\frac{10\cdot\ln 122}{99}+\mathrm{arctg}\,11\approx\mathbf{1{,}10599}3\,.$$

522. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem
$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$
osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4,\,5]$.

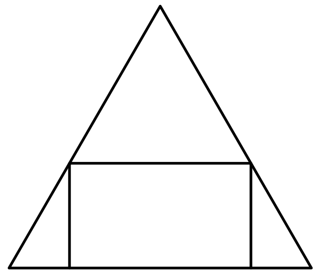
Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:
$$f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}=\frac{4x^2-36x+81}{4x^3}=\frac{(2x-9)^2}{4x^3}\geqslant 0\,,$$
przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(4)=\frac{207}{128}+\ln 4\approx 3{,}00348\,,$$
$$f(9/2)=\frac{3}{2}+\ln(9/2)\approx 3{,}00408\,,$$
$$f(5)=\frac{279}{200}+\ln 5\approx 3{,}00444\,.$$



523. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?

Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością. Jeżeli walec ma wysokość $x\in(0,h)$, to jego podstawa ma promień $r\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas objętość walca jest równa

$$V(x)=\pi\cdot x\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 .$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0^+}V(x)=\lim_{x\to h^-}V(x)=0\,,$$

a ponadto

$$V'(x)=\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)^2-\frac{2\pi\cdot x\cdot r^2}{h}\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)=\left(1-\frac{x}{h}-\frac{2x}{h}\right)\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{3x}{h}\right)\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right) .$$

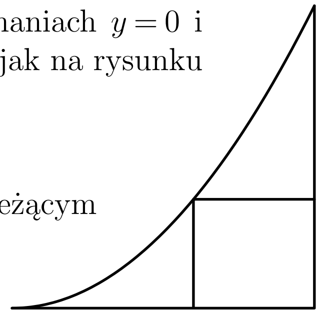
Wobec tego $V'(x)=0$ dla $x=h/3$, co prowadzi do maksymalnej objętości walca równej

$$V(h/3)=\pi\cdot\frac{h}{3}\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{h/3}{h}\right)^2=\frac{\pi\cdot h\cdot r^2}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że stożek ma objętość $1=\pi r^2h/3$.

Odpowiedź: Największa możliwa objętość walca wynosi 4/9.

524. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

Niech (a, a^2), gdzie $a\in(0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot a^2=a^2-a^3\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to 1^-}P(a)=0\,,$$

a ponadto

$$P'(a)=2a-3a^2\,.$$

Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=2/3$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $4/27$.

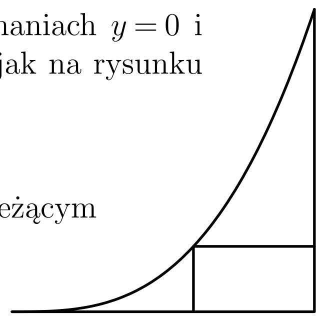
Uwaga: Używając odpowiedniej wersji[1] nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną można uniknąć różniczkowania.

Mamy bowiem

$$P(a)\ =\ (1-a)\cdot a^2\ =\ 4\ \cdot\ (\mathbf{1}-\mathbf{a})\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\,,$$

gdzie otrzymaliśmy iloczyn trzech czynników dodatnich o stałej sumie równej 1, a taki iloczyn jest największy, gdy wszystkie trzy czynniki są równe, czyli równe $1/3$.

525. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

Niech (a, a^3), gdzie $a\in(0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot a^3=a^3-a^4\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to 1^-}P(a)=0\,,$$

[1] $xyz\leqslant\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}$

a ponadto

$$P'(a)=3a^2-4a^3\,.$$

Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=3/4$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64}=\frac{27}{256}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi 27/256.

526. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C}\,,$$

gdzie $C=6$ **(wersja trudniejsza)** lub $C=3$ **(wersja łatwiejsza).**

Rozwiązanie:

Rozwiązanie wersji łatwiejszej:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+12}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+12}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+12}-\sqrt[4]{y^2+12}\right|=\left|\frac{(x^2+12)-(y^2+12)}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}<1\,.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+12}+\sqrt[4]{0+12}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}}\,.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}}\cdot 1=\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16\cdot 12}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{9\cdot 9}}=\frac{|x-y|}{3}\,.$$

Rozwiązanie wersji trudniejszej:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przyjmując[2]

$$g(x)=f'(x)=\frac{x}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{-1/2}}{2\cdot\left(1+12\cdot x^{-2}\right)^{3/4}}=0\,.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{1}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}-\frac{3x^2}{4\cdot\left(x^2+12\right)^{7/4}}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}=\frac{3x^2}{4\cdot\left(x^2+12\right)^{7/4}}\,,$$

$$2\cdot\left(x^2+12\right)=3x^2\,,$$

$$2\cdot 12=x^2\,,$$

$$x=\pm 2\cdot\sqrt{6}\,.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)=\frac{\pm 2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\left(\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)^2+12\right)^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 36^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6^{3/2}}=\pm\frac{1}{6}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/6$ i $1/6$, skąd $|g(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

527. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$.

[2] W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu, gdyż to pojęcie nie pojawiło się jeszcze na wykładzie.

Rozwiązanie:
Niech $f(x)=\sqrt[x]{x}$.
Wówczas

$$f'(x)=\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\,.$$

Zatem $f'(x)>0$ dla $x<e$ oraz $f'(x)<0$ dla $x>e$.
Wobec tego funkcja f jest rosnąca w przedziale $[2, e]$ i malejąca w przedziale $[e, 4]$, a ponieważ $f(2)=f(4)=\sqrt{2}$, otrzymujemy $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$ dla $x\in(2, 4)$.

528. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=5\sin x-\sin 5x\,.$$

Rozwiązanie:
Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 2π i różniczkowalna, wystarczy porównać wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej znajdujących się w przedziale $[0, 2\pi)$.
Skoro

$$f'(x)=5\cos x-5\cos 5x\,,$$

równanie $f'(x)=0$ jest równoważne równaniu

$$\cos x=\cos 5x\,.$$

Ponieważ równość

$$\cos x=\cos y$$

jest równoważna istnieniu liczby całkowitej k i znaku $\pm$ takich, że

$$y=2k\pi\pm x\,,$$

otrzymujemy równanie

$$5x=2k\pi\pm x\,,$$

czyli

$$(5\mp 1)\cdot x=2k\pi\,.$$

Wobec tego

$$x=\frac{k\pi}{2}\qquad\text{lub}\qquad x=\frac{k\pi}{3}\,,$$

co w połączeniu z warunkiem $x\in[0, 2\pi)$ prowadzi do ośmiu miejsc zerowych pochodnej w jednym okresie.
Sprawdzając wartości funkcji f w tych ośmiu punktach otrzymujemy:

$$f(0)=0\,,\qquad f(\pi/3)=3\sqrt{3}\,,\qquad f(\pi/2)=4\,,\qquad f(2\pi/3)=3\sqrt{3}\,,$$
$$f(\pi)=0\,,\qquad f(4\pi/3)=-3\sqrt{3}\,,\qquad f(3\pi/2)=-4\,,\qquad f(5\pi/3)=-3\sqrt{3}\,.$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji f jest równa $3\sqrt{3}$.

529. Niech $f(x)=4\cos x+\sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0, 2\pi)$.

Odpowiedź:

$$\frac{\pi}{10}, \qquad \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{9\pi}{10}, \qquad \frac{7\pi}{6}, \qquad \frac{13\pi}{10}, \qquad \frac{17\pi}{10}, \qquad \frac{11\pi}{6}.$$

530. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13 \qquad \text{czy} \qquad 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10\ ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x)=16\operatorname{arctg}x-\ln(x^2+1)$.

Rozwiązanie:

Różniczkując podaną we wskazówce funkcję pomocniczą otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{16}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2(8-x)}{x^2+1}>0$$

dla $x<8$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty,8]$. W szczególności $f(7)<f(8)$, skąd dostajemy kolejno:

$$16\cdot\operatorname{arctg}7-\ln 50 < 16\cdot\operatorname{arctg}8-\ln 65,$$

$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 65 < 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 50,$$

$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13+\ln 5 < 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10+\ln 5,$$

$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13 < 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10.$$

Odpowiedź: Większa jest liczba $16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0,\infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

531. $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$ **3/8**

532. $f(x)=4\sqrt{x}-x^2$ **3**

533. $f(x)=32\sqrt{x}-x^2$ **48**

534. $f(x)=4\sqrt{x}-27x^2$ **1**

535. $f(x)=32\sqrt{x}-27x^2$ **16**

536. $f(x)=4\sqrt{x}-125x^2$ **3/5**

537. $f(x)=6\sqrt{x}-x^3$ **5**

538. $f(x)=3\sqrt{x}-16x^3$ **5/4**

539. $f(x)=8\sqrt{x}-x^4$ **7**

540. $f(x)=\sqrt{x}-16x^4$ **7/16**

541. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Równość $g(x)=y$ jest równoważna równości $f(y)=x$, czyli

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

lub inaczej

$$x=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\,, \qquad (\clubsuit)$$

jeśli przyjmiemy $t=e^y$. Przy tych oznaczeniach mamy $t>0$ i $y=\ln t$. Rozwiązujemy równanie ($\clubsuit$) tak, aby wyznaczyć t w zależności od x:

$$2xt=t^2-1\,,$$

$$t^2-2xt-1=0\,,$$

$$t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}\,,$$

$$t=x\pm\sqrt{x^2+1}\,,$$

skąd wobec $t>0$ musimy przyjąć "$\pm$" = "$+$". Ostatecznie

$$t=x+\sqrt{x^2+1}$$

i w konsekwencji

$$g(x)=y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,.$$

Mając jawny wzór określający funkcję g bez trudu obliczamy jej pochodną:

$$g'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=4/3$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(4/3)=\frac{1}{\sqrt{16/9+1}}=\frac{1}{\sqrt{25/9}}=\frac{3}{5}\,.$$

Sposób II:

Zauważmy, że

$$f'(y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sqrt{\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}}=\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}+1}=\sqrt{\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{\left(f(y)\right)^2+1}\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\sqrt{\left(f(g(x))\right)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy równość

$$f'(y)=\sqrt{(f(y))^2+1}$$

dla $y=g(x)$.

Dla urozmaicenia tym razem jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=12/5$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(12/5)=\frac{1}{\sqrt{144/25+1}}=\frac{1}{\sqrt{169/25}}=\frac{5}{13}\,.$$

542. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^5+x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x)=5x^4+1\,.$$

Zauważmy też, że

$$g(0)=0,\qquad g(1)=2\qquad\text{oraz}\qquad g(2)=34\,,$$

skąd odpowiednio

$$f(0)=0,\qquad f(2)=1\qquad\text{oraz}\qquad f(34)=2\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$

co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=2$ i $x=34$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{5\cdot 0^4+1}=\frac{1}{1}=1\,,$$

$$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{5\cdot 1^4+1}=\frac{1}{6}$$

i

$$f'(34)=\frac{1}{g'(f(34))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{5\cdot 2^4+1}=\frac{1}{81}\,.$$

Odpowiedź:

$$f'(0)=1,\qquad f'(2)=\frac{1}{6}\qquad\text{oraz}\qquad f'(34)=\frac{1}{81}\,.$$

543. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x)=3x^2+9\,.$$

Zauważmy też, że

$$g(0)=0, \quad g(1)=10 \quad \text{oraz} \quad g(4)=100\,,$$

skąd odpowiednio

$$f(0)=0, \quad f(10)=1 \quad \text{oraz} \quad f(100)=4\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$

co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=10$ i $x=100$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{3\cdot 0^2+9}=\frac{1}{9}\,,$$

$$f'(10)=\frac{1}{g'(f(10))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3\cdot 1^2+9}=\frac{1}{12}$$

i

$$f'(100)=\frac{1}{g'(f(100))}=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{3\cdot 4^2+9}=\frac{1}{57}\,.$$

Odpowiedź:

$$f'(0)=\frac{1}{9}, \quad f'(10)=\frac{1}{12} \quad \text{oraz} \quad f'(100)=\frac{1}{57}\,.$$

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

544. $f_1(x)=x^3+x$	$g_1'(0)=\mathbf{1}$	$g_1'(2)=\mathbf{1/4}$	$g_1'(130)=\mathbf{1/76}$
545. $f_2(x)=x^7+x$	$g_2'(0)=\mathbf{1}$	$g_2'(2)=\mathbf{1/8}$	$g_2'(130)=\mathbf{1/449}$
546. $f_3(x)=x^3+5x$	$g_3'(0)=\mathbf{1/5}$	$g_3'(6)=\mathbf{1/8}$	$g_3'(42)=\mathbf{1/32}$
547. $f_4(x)=x^5+5x$	$g_4'(0)=\mathbf{1/5}$	$g_4'(6)=\mathbf{1/10}$	$g_4'(42)=\mathbf{1/85}$
548. $f_5(x)=x^3+2x$	$g_5'(3)=\mathbf{1/5}$	$g_5'(12)=\mathbf{1/14}$	$g_5'(72)=\mathbf{1/50}$
549. $f_6(x)=x^3+4x$	$g_6'(5)=\mathbf{1/7}$	$g_6'(16)=\mathbf{1/16}$	$g_6'(80)=\mathbf{1/52}$
550. $f_7(x)=2x^3+x$	$g_7'(3)=\mathbf{1/7}$	$g_7'(18)=\mathbf{1/25}$	$g_7'(57)=\mathbf{1/55}$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcja $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x))=x^3+3x\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

551. $g_1(x)=x^3+x+6$ $f_1'(8)=\mathbf{3/2}$ $f_1'(16)=\mathbf{15/13}$ $f_1'(36)=\mathbf{15/14}$

552. $g_2(x)=x^3+2x+3$ $f_2'(6)=\mathbf{6/5}$ $f_2'(15)=\mathbf{15/14}$ $f_2'(36)=\mathbf{30/29}$

553. $g_3(x)=2x^3+x$ $f_3'(3)=\mathbf{6/7}$ $f_3'(18)=\mathbf{3/5}$ $f_3'(57)=\mathbf{6/11}$

554. $g_4(x)=x^5+x+2$ $f_4'(2)=\mathbf{3}$ $f_4'(4)=\mathbf{1}$ $f_4'(36)=\mathbf{5/27}$

555. $g_5(x)=x^5+2x$ $f_5'(0)=\mathbf{3/2}$ $f_5'(3)=\mathbf{6/7}$ $f_5'(36)=\mathbf{15/82}$

556. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f=g\circ h$, gdzie

$$g(t)=\operatorname{arctg}(t-1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

oraz

$$h(x)=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Funkcja $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(t)=\operatorname{arctg}(t-1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

ma pochodną

$$g'(t)=\frac{1}{(t-1)^2+1}+\frac{-2/t^2}{\left(\frac{2}{t}-1\right)^2+1}=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{2}{(2-t)^2+t^2}=$$

$$=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{2}{4-4t+2t^2}=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{1}{2-2t+t^2}=0\,,$$

jest więc stała. Ponieważ

$$g(1)=\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\,,$$

mamy $g(t)=\pi/4$ dla każdego $t\in(0,+\infty)$.

Pozostaje zauważyć, że przyjmując

$$t=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{t}=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,,$$

skąd

$$f(x)=g(t)=\frac{\pi}{4}\,.$$

Zatem f jest funkcją stałą równą $\pi/4$. W konsekwencji przyjmuje ona na całym rozważanym przedziale $[10,50]$ największą (a zarazem najmniejszą) wartość $\pi/4$ (niewymierną, bo π jest niewymierne).

557. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-4h-2-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-4-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{16e^{2h}}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=4/3$ i wówczas $f'(0)=2/3$.

558. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\cos h}{e^h-1-h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h-Ae^h+A+Ah}{he^h-h-h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-Ae^h+A}{e^h+he^h-1-2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-Ae^h}{2e^h+he^h-2}.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h-e^h}{3e^h+he^h}=-\frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=-1/3$.

559. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)-Ah^2}{h^3}.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{3e^{3h}-2e^{2h}-\frac{1}{1+h}-2Ah}{3h^2}.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{9e^{3h}-4e^{2h}+\frac{1}{(1+h)^2}-2A}{6h}.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{6-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=3$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{27e^{3h}-8e^{2h}-\frac{2}{(1+h)^3}}{6}=\frac{17}{6}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=3$ i wówczas $f'(0)=17/6$.

560. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } \ x\neq 0 \\ A & \text{dla } \ x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2he^{-h}-\ln(1+2h)}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2he^{-h}-\ln(1+2h)-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{-h}-2he^{-h}-\frac{2}{1+2h}-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-4e^{-h}+2he^{-h}+\frac{4}{(1+2h)^2}-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{6e^{-h}-2he^{-h}-\frac{16}{(1+2h)^3}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-10-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=-5/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-8e^{-h}+2he^{-h}+\frac{96}{(1+2h)^4}}{24}=\frac{-8+96}{24}=\frac{88}{24}=\frac{11}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=-5/3$ i wówczas $f'(0)=11/3$.

561. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } \ x\neq 0 \\ A & \text{dla } \ x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-\sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sqrt{1+h}-A\cdot\ln(1+h)}{h\cdot\ln(1+h)}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+h}}-\frac{A}{1+h}}{\ln(1+h)+\frac{h}{1+h}}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1/2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\frac{1}{4\cdot(1+h)^{3/2}}+\frac{1/2}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h}+\frac{1}{(1+h)^2}}=\frac{7}{8}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1/2$ i wówczas $f'(0)=7/8$.

562. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2} & \text{dla}\quad x\neq 0\\[2ex] A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{e^h}-e^{h+1}}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}-e^{h+1}-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{e-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=e/2$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{3h}+2\cdot e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}}{6}=\frac{4e}{6}=\frac{2e}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=e/2$ i wówczas $f'(0)=2e/3$.