

Kolokwium nr 5: środa 3.01.2024, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 1–562.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach  
w piątek 15.12.2023, wtorek 19.12.2023 i piątek<sup>1</sup> 22.12.2023.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zadania podobne do wcześniej rozwiązanych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

## 10. Pochodna funkcji – zastosowania.

501. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 < \frac{1}{1201}.$$

502. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}.$$

503. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{34} < \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 < \frac{1}{13}.$$

504. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 12 < \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 10.$$

505. Udowodnić nierówność

$$26 \cdot e^{\operatorname{arctg} 5} < 25 \cdot e^{\operatorname{arctg} 7}.$$

506. Dana jest funkcja  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[\pi]{x^\pi + \pi}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

507. Dana jest funkcja  $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-10, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

508. Dana jest funkcja  $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-10, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y|.$$

---

<sup>1</sup>Ćwiczenia zaplanowane na piątek 22 grudnia 2023 powinny się odbyć przed przerwą świąteczną i nie wcześniej niż w poniedziałek 18 grudnia 2023.

**509.** Dana jest funkcja  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-1, 1]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

**510.** Dana jest funkcja  $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-4, 4]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

**511.** Niech funkcja  $f: [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [4, \infty)$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{256}.$$

**512.** Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x}).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

**513.** Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

**514.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - 3 \cdot |x + 1|$$

na przedziale  $[-2, 2]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

**515.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale  $[-4, 3]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

**516.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 6|$$

na przedziale  $[-5, 5]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

**517.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

na przedziale  $[-3, 3]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

**518.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2$$

na przedziale  $[-2, 3]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiągnięte.

**519.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale  $[-4, \sqrt{10}]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiągnięte.

**520.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale  $[-11, 9]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiągnięte.

**521.** Wyznaczyć punkty, w których funkcja  $f$  zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \operatorname{arctg} x$$

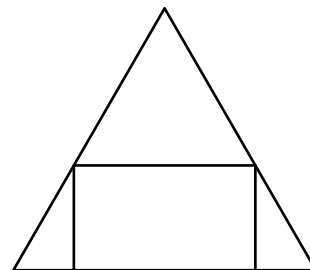
osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale  $[9, 11]$ .

**522.** Wyznaczyć punkty, w których funkcja  $f$  zdefiniowana wzorem

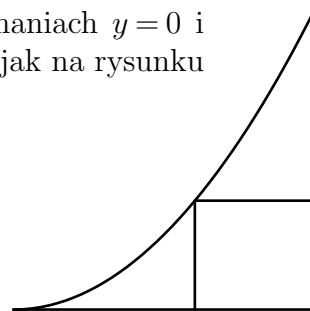
$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale  $[4, 5]$ .

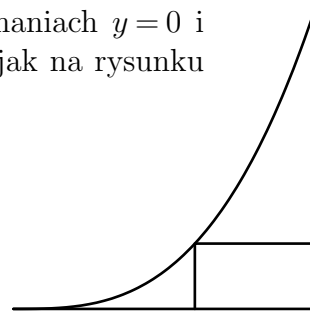
**523.** W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



**524.** W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach  $y = 0$  i  $x = 1$  oraz parabolą o równaniu  $y = x^2$  chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



**525.** W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach  $y = 0$  i  $x = 1$  oraz krzywą o równaniu  $y = x^3$  chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



**526.** Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$ . Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{C},$$

gdzie  $C = 6$  (**wersja trudniejsza**) lub  $C = 3$  (**wersja łatwiejsza**).

**527.** Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x \in (2, 4)$  zachodzi nierówność  $\sqrt[x]{x} > \sqrt{2}$ .

**528.** Wyznaczyć największą wartość funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem

$$f(x) = 5 \sin x - \sin 5x.$$

**529.** Niech  $f(x) = 4 \cos x + \sin 4x$ . Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji  $f$  w przedziale  $[0, 2\pi)$ .

**530.** Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 \quad \text{czy} \quad 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 ?$$

**Wskazówka 1:** Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

**Wskazówka 2:** Zbadaj funkcję pomocniczą  $f(x) = 16 \operatorname{arctg} x - \ln(x^2 + 1)$ .

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji  $f$  na przedziale  $[0, \infty)$ . Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

**531.**  $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$  .....

**532.**  $f(x) = 4\sqrt{x} - x^2$  .....

**533.**  $f(x) = 32\sqrt{x} - x^2$  .....

**534.**  $f(x) = 4\sqrt{x} - 27x^2$  .....

**535.**  $f(x) = 32\sqrt{x} - 27x^2$  .....

**536.**  $f(x) = 4\sqrt{x} - 125x^2$  .....

**537.**  $f(x) = 6\sqrt{x} - x^3$  .....

**538.**  $f(x) = 3\sqrt{x} - 16x^3$  .....

**539.**  $f(x) = 8\sqrt{x} - x^4$  .....

**540.**  $f(x) = \sqrt{x} - 16x^4$  .....

**541.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją odwrotną do  $f$ , tzn.  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .

Podać wzór na pochodną funkcji  $g$ . Podać przykład takiej liczby wymiernej  $x > 1$ , że liczba  $g'(x)$  jest wymierna.

**542.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem  $g(x) = x^5 + x$ . Obliczyć  $f'(0)$ ,  $f'(2)$  i  $f'(34)$ .

**543.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem  $g(x) = x^3 + 9x$ . Obliczyć  $f'(0)$ ,  $f'(10)$  i  $f'(100)$ .

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja  $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją odwrotną do funkcji  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji  $g_i$  w trzech podanych punktach.

$$544. f_1(x) = x^3 + x \quad g'_1(0) = \dots \quad g'_1(2) = \dots \quad g'_1(130) = \dots$$

$$545. f_2(x) = x^7 + x \quad g'_2(0) = \dots \quad g'_2(2) = \dots \quad g'_2(130) = \dots$$

$$546. f_3(x) = x^3 + 5x \quad g'_3(0) = \dots \quad g'_3(6) = \dots \quad g'_3(42) = \dots$$

$$547. f_4(x) = x^5 + 5x \quad g'_4(0) = \dots \quad g'_4(6) = \dots \quad g'_4(42) = \dots$$

$$548. f_5(x) = x^3 + 2x \quad g'_5(3) = \dots \quad g'_5(12) = \dots \quad g'_5(72) = \dots$$

$$549. f_6(x) = x^3 + 4x \quad g'_6(5) = \dots \quad g'_6(16) = \dots \quad g'_6(80) = \dots$$

$$550. f_7(x) = 2x^3 + x \quad g'_7(3) = \dots \quad g'_7(18) = \dots \quad g'_7(57) = \dots$$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji  $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcja  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji  $f_i$  w trzech podanych punktach.

$$551. g_1(x) = x^3 + x + 6 \quad f'_1(8) = \dots \quad f'_1(16) = \dots \quad f'_1(36) = \dots$$

$$552. g_2(x) = x^3 + 2x + 3 \quad f'_2(6) = \dots \quad f'_2(15) = \dots \quad f'_2(36) = \dots$$

$$553. g_3(x) = 2x^3 + x \quad f'_3(3) = \dots \quad f'_3(18) = \dots \quad f'_3(57) = \dots$$

$$554. g_4(x) = x^5 + x + 2 \quad f'_4(2) = \dots \quad f'_4(4) = \dots \quad f'_4(36) = \dots$$

$$555. g_5(x) = x^5 + 2x \quad f'_5(0) = \dots \quad f'_5(3) = \dots \quad f'_5(36) = \dots$$

**556.** Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1 \right) + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} - \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1 \right)$$

na przedziale  $[10, 50]$  i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

**Wskazówka:**  $f = g \circ h$ , gdzie

$$g(t) = \operatorname{arctg}(t-1) + \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{t} - 1 \right)$$

oraz

$$h(x) = \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1}.$$

**557.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

**558.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

**559.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

**560.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^{-x} - \ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

**561.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

**562.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{e^x} - e^{x+1}}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .