

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w piątek 6.10.2023 i wtorek 10.10.2023.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

1. $\sum_{i=3}^5 i^2$ 2. $\sum_{i=-99}^{100} i^3$ 3. $\sum_{i=-10}^{10} 7$ 4. $\sum_{i=1}^{100} i$ 5. $\sum_{i=1}^{24} i^2$ 6. $\prod_{i=1}^6 i$ 7. $\prod_{i=-2020}^{2020} i^{2020}$

8. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 2$ b) $x < 1 \Rightarrow x^2 > 0$ c) $x < 1 \Rightarrow x^2 < 0$ d) $x^5 > 32 \Rightarrow x^6 > 64$
e) $x^6 > 64 \Rightarrow x^7 > 128$ f) $x^5 < 32 \Rightarrow x^6 < 64$ g) $x^6 < 64 \Rightarrow x^7 < 128$

OSZUSTWO 9. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110. \quad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność

$30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geq 5$.

Zatem nierówność (*) została udowodniona dla $n \geq 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność (*) jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

10. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$

11. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

12. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k < n$ spełniających równanie

$$k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

13. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

14. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geq 4^n.$$

15. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków \geq , \leq , a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2) \cdot \binom{2n}{n} \dots \dots \dots 3 \cdot 2^{2n-1}.$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$

17. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq 4^{2n-1}.$$

19. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leq 4^n.$$

20. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

21. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

22. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65} \cdot n \leq 2^n + 2^{71}.$$

23. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

24. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28} \cdot n \leq 3^n + 3^{31}.$$

25. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

26. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

27. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{15n+4} < 9 \cdot 4^{n-1}.$$

Przypomnij sobie ze szkoły: Wzory skróconego mnożenia.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Mogą być omówione na ćwiczeniach w miarę wolnego czasu,

28. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

29. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $(x+2)^2 = x^2 + \dots$

b) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots$

c) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots$

d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$

e) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$

f) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$

g) $a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots$

h) $a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots$

i) $(a+b)^3 = a^3 + 3 \dots$

j) $(a-b)^4 = a^4 - \dots$

k) $(a-b)^5 = a^5 - \dots$

l) $a^n - b^n = (a-b) \cdot \dots$

m) $a^n + b^n = (a+b) \cdot \dots$ - dla których n ?

n) $a^n - b^n = (a+b) \cdot \dots$ - dla których n ?

o) $a^n + b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

p) $a^n - b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

30. W liczbie dziewięciocyfrowej podanych jest 5 cyfr. Wpisz brakujące 4 cyfry tak, aby uzyskana liczba była kwadratem liczby całkowitej.

a)

1	0	0	1	8				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 ;

b)

4	0	0	2	4				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 ;

c)

9	0	0	2	4				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 ;

d)

9	0	0	4	8				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 .

31. Zapisz podaną liczbę wymierną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \dots$; b) $\frac{1}{\sqrt{7}-1} - \frac{1}{\sqrt{7}+1} = \dots$;

c) $\frac{1}{\sqrt{11}-1} - \frac{1}{\sqrt{11}+1} = \dots$; d) $\frac{1}{\sqrt{13}-1} - \frac{1}{\sqrt{13}+1} = \dots$

32. Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych większych od 1.

- a) $9\,991 = \dots\dots\dots$; b) $89\,951 = \dots\dots\dots$;
 c) $999\,919 = \dots\dots\dots$; d) $8\,999\,999 = \dots\dots\dots$

33. Dla danej liczby n podaj dwucyfrową liczbę pierwszą p będącą dzielnikiem liczby n .

- a) $n = 77^{111} - 24^{111}$, $p = \dots\dots\dots$; b) $n = 69^{122} - 20^{122}$, $p = \dots\dots\dots$;
 c) $n = 51^{133} + 22^{133}$, $p = \dots\dots\dots$; d) $n = 66^{166} - 31^{166}$, $p = \dots\dots\dots$

34. Wiedząc, że

$$\binom{14}{4} = 1001, \quad \binom{14}{5} = 2002, \quad \binom{14}{6} = 3003,$$

podać wartość współczynnika dwumianowego

- a) $\binom{15}{5} = \dots\dots\dots$; b) $\binom{15}{6} = \dots\dots\dots$; c) $\binom{16}{6} = \dots\dots\dots$; d) $\binom{15}{10} = \dots\dots\dots$

35. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$(a^{a^k})^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

Uwaga: Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

- a) $a = 5$, $k = 2$, $n = \dots\dots\dots$; b) $a = 3$, $k = 3$, $n = \dots\dots\dots$;
 c) $a = 2$, $k = 5$, $n = \dots\dots\dots$; d) $a = 3$, $k = 4$, $n = \dots\dots\dots$

36. Wskazać taką liczbę C , że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n i k , gdzie $n \geq k + 2$, prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + C \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

37. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \quad \binom{100}{27}, \quad \binom{100}{47}, \quad \binom{100}{57}, \quad \binom{100}{77}, \quad \binom{100}{97}.$$

38. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$