Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Materiały dodatkowe (30 listopada 2012)

www.omg.edu.pl

Opowieści o indukcji

Wzoreczki w kropeczki I — silnia

Liczbę $n!$ definiujemy jako iloczyn liczb naturalnych od 1 do n.

Korzystając z tej definicji możemy bez trudu zapisać i obliczyć w pamięci wartość $5!$:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Wartości $10!$ nie będziemy liczyć w pamięci, ale bez trudu zapiszemy odpowiedni iloczyn:

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

W jednej linijce zmieści nam się iloczyn definiujący $32!$, chociaż pewnie nie będziemy uważnie sprawdzać, czy wszystkie czynniki zostały poprawnie wypisane:

$$32! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32.$$

Nawet gdyby pracowicie wypisać wszystkie czynniki wchodzące w skład iloczynu tworzącego $100!$, to i tak byśmy wszystkich nie czytali. Wiemy przecież, jak ten iloczyn ma wyglądać. Wystarczy zapisać jego początek i koniec, a środek zastąpić kropeczkami — każdy wie, co się za nimi kryje i w razie potrzeby może to uzupełnić:

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100.$$

Kolejnego iloczynu raczej nikt wypisywać nie zechce, chociaż przy odrobinie cierpliwości można (tylko po co?):

$$2012! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012.$$

A następnego iloczynu po prostu fizycznie wypisać się nie da — liczba tworzących go czynników jest większa od liczby cząstek we wszechświecie. Ale po poprzednich przykładach wyobrażamy sobie, jak ten iloczyn powinien wyglądać:

$$10^{100}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot \left(10^{100} - 2\right) \cdot \left(10^{100} - 1\right) \cdot 10^{100}.$$

Liczba 10^{100} jest tak abstrakcyjnie duża, że nic nie stoi na przeszkodzie, aby zastąpić ją przez n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Nie używając kropeczek, możemy zapisać definicję silni w postaci rekurencyjnej:

$$1! = 1, \qquad n! = (n-1)! \cdot n \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

W tej definicji podajemy wartość $1!$, a następnie pokazujemy, jak obliczyć $n!$ znając $(n-1)!$, a więc:

- jak obliczyć $2!$ znając $1!$,
- jak obliczyć $3!$ znając $2!$,
- jak obliczyć $4!$ znając $3!$

itd.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wzoreczki w kropeczki II — ciąg Fibonacciego

W ciągu Fibonacciego (F_n) pierwsze dwa wyrazy są równe 1, a każdy kolejny jest sumą dwóch poprzednich. Mniejsza o konkretne wartości, ale gdybyśmy chcieli znać siódmy wyraz, powinniśmy wykonać następujące obliczenia:

$$F_1=F_2=1,\quad F_3=F_1+F_2,\quad F_4=F_2+F_3,\quad F_5=F_3+F_4,\quad F_6=F_4+F_5,\quad F_7=F_5+F_6.$$

Znalezienie setnego wyrazu to wykonanie następujących rachunków — tu nie wypisaliśmy wszystkich operacji, ale domyślamy się, że w miejscu kropek kryją się 94 dodawania:

$$F_1=F_2=1,\quad F_3=F_1+F_2,\quad F_4=F_2+F_3,\quad \ldots,\quad F_{99}=F_{97}+F_{98},\quad F_{100}=F_{98}+F_{99}.$$

W tym momencie nic nie stoi na przeszkodzie, aby 100 zastąpić przez n:

$$F_1=F_2=1,\quad F_3=F_1+F_2,\quad F_4=F_2+F_3,\quad \ldots,\quad F_{n-1}=F_{n-3}+F_{n-2},\quad F_n=F_{n-2}+F_{n-1}.$$

Rekurencyjnie można zdefiniować ciąg Fibonacciego następująco:

$$F_1=F_2=1,\qquad F_n=F_{n-2}+F_{n-1}\ \text{ dla }\ n=3,4,5,\ldots$$

W tej definicji podajemy wartości F_1 oraz F_2, a następnie pokazujemy, jak obliczyć F_n znając F_{n-2} oraz F_{n-1}, a więc:
- jak obliczyć F_3 znając F_1 oraz F_2,
- jak obliczyć F_4 znając F_2 oraz F_3,
- jak obliczyć F_5 znając F_3 oraz F_4

itd.

Wzoreczki w kropeczki III — przykład 1

Rozważmy sumę

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72},$$

gdzie w mianownikach znajdują się iloczyny par kolejnych liczb naturalnych. Chcielibyśmy obliczyć wartość tej sumy bez pracochłonnego dodawania wielu ułamków. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

To pozwala zapisać składniki wyjściowej sumy w postaci różnic

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right),$$

gdzie odjemnik każdej różnicy (poza ostatnią) jest równy odjemnej następnej różnicy. Ta obserwacja prowadzi do następujących uproszczeń:

$$\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{9}\right).$$

Wartość wyjściowej sumy jest więc równa $1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

Ta sama procedura zastosowana do sumy

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}$$

prowadzi do

$$\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{98}}-\cancel{\frac{1}{99}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{99}}-\cancel{\frac{1}{100}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{100}}-\frac{1}{101}\right)=\frac{100}{101}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Nie wykonaliśmy wprawdzie wszystkich operacji, ale doskonale wyobrażamy sobie, co dzieje się w miejscu kropek — dochodzi do analogicznych uproszczeń, jak w poprzednim przykładzie.

Nic nie stoi teraz na przeszkodzie, aby sumę

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

zapisać w postaci

$$\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Udowodniliśmy więc, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}. \tag{1}$$

Na dowód równości (1) można też spojrzeć następująco.

1° Dla $n=1$ lewa strona równości (1) zawiera jeden składnik, jest więc równa $1/2$. Ponieważ prawa strona też ma wartość $1/2$, równość (1) jest prawdziwa dla $n=1$.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że równość (1) jest prawdziwa. Gdyby w tej równości konsekwentnie zamienić n na $n+1$, otrzymalibyśmy równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}. \tag{2}$$

Udowodnimy, że równość (2) jest prawdziwa, jeżeli założymy (1).

Wychodząc od lewej strony (2) i korzystając z (1) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$
$$=1+\frac{-(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=1+\frac{-n-1}{(n+1)\cdot(n+2)}=1-\frac{1}{n+2},$$

czyli doszliśmy do prawej strony (2).

Podsumujmy, co się stało. Dla przejrzystości oznaczmy równość (1) przez $T(n)$. Wtedy równość (2) możemy zapisać jako $T(n+1)$.

W punkcie 1° sprawdziliśmy, że prawdziwe jest $T(1)$.

W punkcie 2° udowodniliśmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+1)$.

Dygresja o implikacji

W tym momencie należy wyjaśnić, czym naprawdę jest implikacja i na czym faktycznie polega dowód jej prawdziwości.

Otóż implikacja postaci $p\Rightarrow q$ jest **prawdziwa** w następujących 3 przypadkach:

- zdanie p jest FAŁSZYWE, zdanie q jest FAŁSZYWE,
- zdanie p jest FAŁSZYWE, zdanie q jest PRAWDZIWE,
- zdanie p jest PRAWDZIWE, zdanie q jest PRAWDZIWE,

natomiast jest **fałszywa** tylko w przypadku, gdy

- zdanie p jest PRAWDZIWE, zdanie q jest FAŁSZYWE.

Zdanie p nazywamy *poprzednikiem*, a zdanie q *następnikiem* implikacji.

Matematyczne znaczenie implikacji jest nieco odmienne od potocznego rozumienia konstrukcji logicznych z użyciem słowa **jeżeli**, które to słowo bywa mylone z równoważnością.

Implikacja *Jeżeli Perzanowo jest stolicą Polski, to ...* jest prawdziwa bez względu na to, co pojawi się w jej następniku, gdyż fałszywość poprzednika sama w sobie decyduje o prawdziwości implikacji — taka implikacja nie mówi nic o wartości logicznej następnika.

Jednak zagadnięcie przypadkowego przechodnia na ulicy: *Jeżeli Perzanowo jest stolicą Polski, to Pan jest mądry*, może nie spotkać się z właściwym, z matematycznego punktu widzenia, zrozumieniem.

Dwie najważniejsze rzeczy dotyczące implikacji, na które należy zwrócić uwagę w kontekście indukcji, są następujące.

Po pierwsze, wiedza o prawdziwości implikacji $p \Rightarrow q$ w połączeniu z wiedzą o prawdziwości poprzednika p pozwala nam wnioskować o prawdziwości następnika q.

Po drugie, dowód prawdziwości implikacji $p \Rightarrow q$ nie orzeka niczego o prawdziwości zdań p oraz q, pomimo że zwykle zaczynamy go od poczynienia założenia, że poprzednik p jest prawdziwy. Taki dowód należy rozumieć jako skrót następującego przeformalizowanego schematu rozważania dwóch przypadków:

Przypadek I. Poprzednik p fałszywy.
Wtedy nie ma czego dowodzić, bo implikacja $p \Rightarrow q$ jest prawdziwa.

Przypadek II. Poprzednik p prawdziwy.
Wtedy następuje interesująca część dowodu (sprowadzająca się do dowodu prawdziwości q), bo w tym przypadku prawdziwość implikacji $p \Rightarrow q$ jest równoważna prawdziwości następnika q.

Prosty przykładzik. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x, prawdziwa jest implikacja

$$x > 0 \;\Rightarrow\; x+1 > 0.$$

Patrząc na tę implikację mówimy: *No tak, od razu widać, że jeżeli liczba x jest dodatnia, to $x+1$ także.*

Ale należy wyraźnie podkreślić, że sama implikacja jest prawdziwa także dla ujemnych liczb x oraz dla $x=0$. Tyle, że w tych przypadkach implikacja ta jest mało ciekawa, bo jej poprzednik jest fałszywy.

Po dygresji o implikacji powrót do przykładu 1

Wróćmy do podsumowania dowodu równości (1) oznaczonej jako $T(n)$.

1° Sprawdziliśmy, że prawdziwe jest $T(1)$.

2° Udowodniliśmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Rightarrow T(n+1).$$

A więc udowodniliśmy następujące implikacje:

- $T(1) \Rightarrow T(2)$,
- $T(2) \Rightarrow T(3)$,
- $T(3) \Rightarrow T(4)$,
- $T(4) \Rightarrow T(5)$,
- $T(5) \Rightarrow T(6)$

itd.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Możemy na podstawie tych implikacji wyciągać kolejno następujące wnioski:

- $T(1)\Rightarrow T(2)$ — wniosek: skoro sprawdziliśmy $T(1)$, to prawdziwe jest $T(2)$,
- $T(2)\Rightarrow T(3)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(2)$, to prawdziwe jest $T(3)$,
- $T(3)\Rightarrow T(4)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(3)$, to prawdziwe jest $T(4)$,
- $T(4)\Rightarrow T(5)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(4)$, to prawdziwe jest $T(5)$,
- $T(5)\Rightarrow T(6)$ — wniosek: skoro udowodniliśmy $T(5)$, to prawdziwe jest $T(6)$

itd.

Łatwo wyobrazić sobie, że tak jak powyżej mamy wyraźnie wypisane wszystkie przesłanki wystarczające do dowodu $T(6)$, podobnie można byłoby pracowicie wypisać wszystkie implikacje i płynące kolejno z nich wnioski składające się na dowód $T(100)$.

Wyobrażamy sobie, jak wyglądałaby podobna lista implikacji dowodząca prawdziwości $T\left(10^{100}\right)$, chociaż ich wypisanie jest fizycznie niemożliwe.

I podobnie, dla dowolnej liczby naturalnej n, wyobrażamy sobie jak wygląda łańcuszek wynikań stanowiący dowód prawdziwości $T(n)$.

Na czym polega dowód indukcyjny?

Przypuśćmy, że mamy pewne zdanie zależne od liczby naturalnej n, które to zdanie oznaczymy przez $T(n)$. Zdanie to może być równością lub nierównością, ale może też mieć bardziej rozbudowany charakter. Naszym celem jest udowodnienie prawdziwości zdania $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej n.

Dowód indukcyjny przeprowadzamy w sytuacji, gdy bezpośrednie udowodnienie zdania $T(n)$ napotyka trudności, czy to natury merytorycznej, czy też tylko redakcyjnej, natomiast widzimy możliwość powiązania ze sobą zdań $T(n)$ i $T(n+1)$.

Podstawowy schemat dowodu indukcyjnego wygląda następująco:

1° Sprawdzamy, że prawdziwe jest $T(1)$.

2° Dowodzimy, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja

$$T(n)\Rightarrow T(n+1).$$

3° Na podstawie 1° i 2° wyciągamy wniosek, że zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

Uwagi:

Krok 1° z reguły jest tak prosty do wykonania, że słowo *sprawdzamy* jest na ogół bardziej odpowiednie niż *dowodzimy*.

W kroku 2° esencja rozumowania polega na udowodnieniu prawdziwości zdania $T(n+1)$ (zwanego *tezą indukcyjną*) przy wykorzystaniu zdania $T(n)$ (zwanego *założeniem indukcyjnym*).

Należy przy tym zwracać uwagę na staranną redakcję tego kroku i unikać powielania błędnego, ale niestety dość rozpowszechnionego sformułowania.

Błędne sformułowanie: *Załóżmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $T(n)$.*

Ale przecież my mamy udowodnić, że dla każdego n zachodzi $T(n)$ — nie możemy tego ot tak sobie zakładać w trakcie dowodu.

Krok 3° jest standardowym elementem dowodu, który sprowadza się do przytoczenia formułki o wykorzystaniu indukcji. Często bywa pomijany.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2

Zadanie.

Liczby a_n, b_n są określone wzorami

$$a_1=b_1=1, \quad a_{n+1}=a_n+b_n, \quad b_{n+1}=2a_n+b_n \text{ dla } n=1,2,3,\ldots$$

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$2a_n^2-b_n^2=(-1)^{n+1}. \tag{3}$$

Rozwiązanie bez wyraźnego powoływania się na indukcję:

Bez trudu sprawdzamy, że równość (3) jest prawdziwa dla $n=1$, mamy bowiem

$$2a_1^2-b_1^2=2-1=1=(-1)^{1+1}.$$

Ponadto dla dowolnej liczby naturalnej n możemy przeprowadzić następujący rachunek:

$$2a_{n+1}^2-b_{n+1}^2=2(a_n+b_n)^2-(2a_n+b_n)^2=2\left(a_n^2+2a_nb_n+b_n^2\right)-\left(4a_n^2+4a_nb_n+b_n^2\right)=$$

$$=2a_n^2+4a_nb_n+2b_n^2-4a_n^2-4a_nb_n-b_n^2=-2a_n^2+b_n^2=-\left(2a_n^2-b_n^2\right),$$

otrzymując

$$2a_{n+1}^2-b_{n+1}^2=-\left(2a_n^2-b_n^2\right). \tag{4}$$

Korzystając z (4) kolejno dla $n=4,3,2,1$, otrzymujemy

$$2a_5^2-b_5^2=-\left(2a_4^2-b_4^2\right)=2a_3^2-b_3^2=-\left(2a_2^2-b_2^2\right)=2a_1^2-b_1^2=1,$$

co dowodzi (3) dla $n=5$.

Podobnie, korzystając z (4) kolejno dla $n=5,4,3,2,1$, otrzymujemy

$$2a_6^2-b_6^2=-\left(2a_5^2-b_5^2\right)=2a_4^2-b_4^2=-\left(2a_3^2-b_3^2\right)=2a_2^2-b_2^2=-\left(2a_1^2-b_1^2\right)=-1,$$

skąd wynika, że (3) zachodzi dla $n=6$.

Analogicznie otrzymujemy (3) dla $n=100$:

$$2a_{100}^2-b_{100}^2=-\left(2a_{99}^2-b_{99}^2\right)=2a_{98}^2-b_{98}^2=\ldots=-\left(2a_3^2-b_3^2\right)=2a_2^2-b_2^2=-\left(2a_1^2-b_1^2\right)=-1.$$

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby taki sam rachunek przeprowadzić dla dowolnej liczby naturalnej n, otrzymując

$$2a_n^2-b_n^2=-\left(2a_{n-1}^2-b_{n-1}^2\right)=2a_{n-2}^2-b_{n-2}^2=\ldots=-\left(2a_3^2-b_3^2\right)=2a_2^2-b_2^2=-\left(2a_1^2-b_1^2\right)=-1$$

lub

$$2a_n^2-b_n^2=-\left(2a_{n-1}^2-b_{n-1}^2\right)=2a_{n-2}^2-b_{n-2}^2=\ldots=2a_3^2-b_3^2=-\left(2a_2^2-b_2^2\right)=2a_1^2-b_1^2=1$$

w zależności od parzystości n.

Rozwiązanie indukcyjne:

W zasadzie powyższe rozwiązanie zawiera wszystkie potrzebne elementy rachunkowe, jednak jego zgrabna redakcja nastręcza pewne trudności.

Te same rachunki można ubrać w bardziej przejrzysty dowód indukcyjny:

1° Dla $n=1$ równość (3) jest prawdziwa, mamy bowiem

$$2a_1^2-b_1^2=2-1=1=(-1)^{1+1}.$$

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest równość (3).

Udowodnimy, że wówczas

$$2a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = (-1)^{n+2}. \tag{5}$$

Wychodząc od lewej strony równości (5) i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$2a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = 2\left(a_n + b_n\right)^2 - \left(2a_n + b_n\right)^2 = 2\left(a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2\right) - \left(4a_n^2 + 4a_nb_n + b_n^2\right) =$$

$$= 2a_n^2 + 4a_nb_n + 2b_n^2 - 4a_n^2 - 4a_nb_n - b_n^2 = -2a_n^2 + b_n^2 = -\left(2a_n^2 - b_n^2\right) = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2},$$

co dowodzi prawdziwości (5).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (3) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Inne spojrzenie na ciągi z przykładu 2

Zapomnijmy na chwilę o liczbach a_n, b_n zdefiniowanych w przykładzie 2 i przypuśćmy, że interesuje nas znalezienie nieskończenie wielu rozwiązań równania

$$b^2 - 2a^2 = \pm 1 \tag{6}$$

w liczbach naturalnych a, b.

Bez trudu zauważamy, że równanie to jest spełnione przez $a = b = 1$, co można zapisać jako

$$1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$$

lub też w nieco dziwnie wyglądającej formie

$$\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) = -1.$$

Niech teraz dla dowolnej liczby naturalnej n liczby a_n oraz b_n będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = b_n + a_n \cdot \sqrt{2}.$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określone liczby a_n, b_n spełniają rekurencję podaną w przykładzie 2, otrzymujemy więc inną definicję tych samych liczb. Ponadto

$$\left(1 - \sqrt{2}\right)^n = b_n - a_n \cdot \sqrt{2},$$

skąd

$$b_n^2 - 2a_n^2 = \left(b_n + a_n \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(b_n - a_n \cdot \sqrt{2}\right) = \left(\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)^n = (-1)^n.$$

Tak określone a_n, b_n dają więc nieskończenie wiele rozwiązań równania (6), a przy okazji uzyskaliśmy inne rozwiązanie zadania z przykładu 2.

Przykład 3

Zadanie.

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \tag{7}$$

gdzie (F_n) jest ciągiem Fibonacciego zdefiniowanym na stronie 2.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie bez indukcji:

Dla $n=2$ mamy $F_3F_1-F_2^2=2\cdot 1-1^2=1=(-1)^2$.

Ponadto dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi następujący ciąg równości:

$$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(F_{n+1}+F_n)\,F_n-F_{n+1}\,(F_n+F_{n-1})=$$

$$=F_{n+1}F_n+F_n^2-F_{n+1}F_n-F_{n+1}F_{n-1}=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=-\left(F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2\right),$$

czyli

$$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=-\left(F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2\right). \tag{8}$$

Wzór (7) na przykład dla $n=6$ można udowodnić korzystając czterokrotnie z równości (8):

$$F_7F_5-F_6^2=-\left(F_6F_4-F_5^2\right)=F_5F_3-F_4^2=-\left(F_4F_2-F_3^2\right)=F_3F_1-F_2^2=1.$$

Podobnie jest dla pozostałych n.

Rozwiązanie indukcyjne:

A tak wygląda uporządkowanie tych rachunków w postaci dowodu indukcyjnego:

1° Dla $n=2$ równość (7) jest prawdziwa, mamy bowiem

$$F_3F_1-F_2^2=2\cdot 1-1^2=1=(-1)^2.$$

2° Niech $n\geqslant 2$ będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest równość (7).

Udowodnimy, że wówczas

$$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(-1)^{n+1}. \tag{9}$$

Wychodząc od lewej strony równości (9) i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(F_{n+1}+F_n)\,F_n-F_{n+1}\,(F_n+F_{n-1})=$$

$$=F_{n+1}F_n+F_n^2-F_{n+1}F_n-F_{n+1}F_{n-1}=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=-\left(F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2\right)=(-1)^{n+1},$$

co dowodzi prawdziwości (9).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (7) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$.

Uwaga:

W tym wypadku dowód indukcyjny delikatnie odbiega od przedstawionego wcześniej standardowego schematu, a mianowicie dowodzimy twierdzenia dla $n\geqslant 2$ i w konsekwencji rozpoczynamy od sprawdzenia dowodzonej równości dla $n=2$ zamiast $n=1$. Podobnej modyfikacji dokonujemy zawsze, gdy najmniejsza rozważana wartość n nie jest równa 1.

Zmodyfikowany schemat dowodu indukcyjnego:

1° Sprawdzamy, że prawdziwe jest $T\,(n_0)$.

2° Dowodzimy, że dla dowolnej liczby całkowitej $n\geqslant n_0$ prawdziwa jest implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+1)$.

3° Na podstawie 1° i 2° wyciągamy wniosek, że zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant n_0$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 4

Zadanie.

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n-1}. \tag{10}$$

Rozwiązanie z kropeczkami zamiast indukcji:

Sprawdzamy bezpośrednio, że dla $n=1$ dowodzona nierówność przyjmuje postać równości:

$$\binom{2}{1} = 2 = 2^1.$$

Ponadto możemy przeprowadzić rachunki wiążące lewe strony nierówności (10) dla kolejnych wartości n:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!} = \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{n!\cdot(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)} =$$

$$= \binom{2n}{n}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \binom{2n}{n}\cdot 4\cdot\frac{n+1/2}{n+1}.$$

Otrzymaliśmy

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n}\cdot 4\cdot\frac{n+1/2}{n+1} < 4\cdot\binom{2n}{n}.$$

Możemy więc zapisać:

$$\binom{14}{7} = \left(4\cdot\frac{6,5}{7}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{5,5}{6}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{4,5}{5}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{3,5}{4}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{2,5}{3}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{1,5}{2}\right)\cdot\binom{2}{1} < 2^{13}$$

lub ogólniej:

$$\binom{2n}{n} = \left(4\cdot\frac{n-1/2}{n}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{n-3/2}{n-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(4\cdot\frac{3,5}{4}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{2,5}{3}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{1,5}{2}\right)\cdot\binom{2}{1} \leqslant 2^{2n-1}.$$

To samo można zapisać w postaci ciągu nierówności:

$$\binom{14}{7} < 4\cdot\binom{12}{6} < 4^2\cdot\binom{10}{5} < 4^3\cdot\binom{8}{4} < 4^4\cdot\binom{6}{3} < 4^5\cdot\binom{4}{2} < 4^6\cdot\binom{2}{1} = 4^6\cdot 2 = 2^{13}$$

i odpowiednio:

$$\binom{2n}{n} < 4\cdot\binom{2n-2}{n-1} < 4^2\cdot\binom{2n-4}{n-2} < \ldots < 4^{n-3}\cdot\binom{6}{3} < 4^{n-2}\cdot\binom{4}{2} < 4^{n-1}\cdot\binom{2}{1} = 2^{2n-1}.$$

Rozwiązanie indukcyjne:

1° Dla $n=1$ nierówność (10) jest prawdziwa, mamy bowiem $2=2$.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest równość (10).

Udowodnimy, że wówczas

$$\binom{2n+2}{n+1} \leqslant 2^{2n+1}. \tag{11}$$

Wychodząc od lewej strony równości (11) i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!} = \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{n!\cdot(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)} =$$

$$= \binom{2n}{n}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \binom{2n}{n}\cdot 4\cdot\frac{n+1/2}{n+1} < 2^{2n-1}\cdot 4\cdot 1 = 2^{2n+1},$$

co dowodzi prawdziwości (11).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (3) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 5

Zadanie.

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{12}$$

Rozwiązanie:

1° Dla $n=1$ równość (12) przyjmuje postać $1=1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest równość (12).
Udowodnimy, że wówczas

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \tag{13}$$

Wychodząc od lewej strony równości (13) i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 =$$

$$= \frac{n+1}{6}\cdot(n(2n+1)+6(n+1)) = \frac{n+1}{6}\cdot\left(2n^2+7n+6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

co dowodzi prawdziwości (13).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (12) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 6

Zadanie.

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{14}$$

Rozwiązanie:

Zadanie to jest częścią rozwiązania zadania 16 z Ligi OMG (seria IV, październik 2012). Zaprezentowane tam rozumowanie wprawdzie unika wyraźnego powoływania się na indukcję, jednak odbywa się to kosztem przejrzystości jego redakcji.

Poniżej rozwiązanie indukcyjne.

1° Dla $n=1$ równość (14) przyjmuje postać $1=1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest równość (14).
Udowodnimy, że wówczas

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \tag{15}$$

Wychodząc od lewej strony równości (15) i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}\cdot\Big(n^2+4(n+1)\Big)=\frac{(n+1)^2}{4}\cdot\Big(n^2+4n+4\Big)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

co dowodzi prawdziwości (15).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (14) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 7

Zadanie.
Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1^5+2^5+3^5+\ldots+(n-1)^5+n^5<\frac{n^3(n+1)^3}{6}. \tag{16}$$

Rozwiązanie:
1° Dla $n=1$ nierówność (16) przyjmuje postać $1<\frac{4}{3}$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest nierówność (16).
Udowodnimy, że wówczas

$$1^5+2^5+3^5+\ldots+(n-1)^5+n^5+(n+1)^5<\frac{(n+1)^3(n+2)^3}{6}. \tag{17}$$

Wychodząc od lewej strony nierówności (17) i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$1^5+2^5+3^5+\ldots+(n-1)^5+n^5+(n+1)^5<\frac{n^3(n+1)^3}{6}+(n+1)^5=\frac{(n+1)^3}{6}\cdot\Big(n^3+6(n+1)^2\Big)=$$
$$=\frac{(n+1)^3}{6}\cdot\Big(n^3+6n^2+12n+6\Big)<\frac{(n+1)^3}{6}\cdot\Big(n^3+6n^2+12n+8\Big)=\frac{(n+1)^3(n+2)^3}{6},$$

co dowodzi prawdziwości (17).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność (16) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 8

Interesuje nas nierówność

$$n^4\leqslant 2^n. \tag{18}$$

Niestety, dla małych n ta nierówność nie jest prawdziwa, gdyż np. dla $n=2$ przyjmuje ona postać $16\leqslant 4$.

Mając nadzieję na udowodnienie tej nierówności dla dużych n, rozpoczynamy redagowanie dowodu indukcyjnego od drugiego kroku indukcyjnego.

2° Załóżmy, że liczba naturalna n spełnia nierówność (18).
Chcemy wykazać, że wówczas

$$(n+1)^4 \leqslant 2^{n+1}. \tag{19}$$

W tym celu wychodzimy od lewej strony nierówności (19) i wykonujemy ciąg przekształceń i oszacowań, wykorzystując po drodze założenie indukcyjne (18), a także korzystamy dwukrotnie z dodatkowego założenia, że $n \geqslant 6$.

$$(n+1)^4 = n^4 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \leqslant 2^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 = 2^n \cdot \left(1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \cdot \left(1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = 2^n \cdot \left(1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}\right) < 2^n \cdot \left(1+\frac{4}{n}+\frac{12}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \cdot \left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n}\right) = 2^n \cdot \left(1+\frac{6}{n}\right) \leqslant 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

Wykazaliśmy więc nawet nieco więcej, a mianowicie, że z nierówności (18) oraz założenia $n \geqslant 6$ wynika ostra wersja nierówności (19):

$$(n+1)^4 < 2^{n+1}.$$

Jeżeli przez $T(n)$ oznaczymy nierówność (18), to udowodniliśmy następujące wynikania: $T(6) \Rightarrow T(7)$, $T(7) \Rightarrow T(8)$, $T(8) \Rightarrow T(9)$, $T(9) \Rightarrow T(10)$, $T(10) \Rightarrow T(11)$, $T(11) \Rightarrow T(12)$, $T(12) \Rightarrow T(13)$, $T(13) \Rightarrow T(14)$, $T(14) \Rightarrow T(15)$, $T(15) \Rightarrow T(16)$, $T(16) \Rightarrow T(17)$, $T(17) \Rightarrow T(18)$, $T(18) \Rightarrow T(19)$, ...

Z powyższych implikacji nic nie wynika o prawdziwości poszczególnych zdań $T(n)$, dopóki nie dokonamy jakiegokolwiek sprawdzenia.

Okazuje się, że pierwszy krok indukcyjny powinien wyglądać następująco:

1° Dla $n=16$ nierówność (18) jest równością, gdyż wówczas

$$n^4 = 16^4 = \left(2^4\right)^4 = 2^{16} = 2^n.$$

Uwaga: Stąd wynika, że $T(n)$ jest fałszywe dla $n=6,7,8,\ldots,15$, gdyż z prawdziwości nierówności (18) dla którejkolwiek z tych wartości n wynikałaby prawdziwość ostrej wersji nierówności (18) dla $n=16$, co jednak nie ma miejsca, gdyż w przypadku $n=16$ nierówność (18) jest równością.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność (18) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 16$.

Inne spojrzenie na przykład 8

Nierówność (18) jest równoważna nierówności $a_n \geqslant 1$, gdzie

$$a_n = \frac{2^n}{n^4}.$$

Nietrudno sprawdzić, że ciąg (a_n) maleje do wyrazu a_6, a następnie rośnie. Rachunki w kroku 2° można przeorganizować tak, aby wykazać nierówność $a_n < a_{n+1}$ dla $n \geqslant 6$. Wobec tego, że $a_{16} = 1$, łatwo widać, że nierówność (18) jest prawdziwa dla $n \geqslant 16$, a fałszywa dla $n = 6,7,8,\ldots,15$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego