ANALIZA 1, KOLOKWIUM nr 9, 26.01.2024, godz. 8:15–10:15

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **21.** **(10 punktów)**

Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)}\,.$$

Obliczyć $f^{(2025)}(-2)$.

Zadanie **22.** **(10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}\,.$$

Zadanie **23.** **(10 punktów)**

Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^{1,001}\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Zadanie **24.** **(10 punktów)**

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\left(1-x^2\right)^{2025}\cdot(x+1)^2>1\,.$$

Zadanie **25.** **(10 punktów)**

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $(n,\,k)$, gdzie $2k<n$, spełniających równanie

$$\binom{n}{k}=2\cdot\binom{n}{2k}\,.$$

Zadanie **26.** **(10 punktów)**

Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$32^n<n^{2^{2023}}<64^n\,.$$