KOLOKWIUM nr 9, 26.01.2024, godz. 8:15–10:15

Zadanie **21. (10 punktów)**

Niech f będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)}\,.$$
Obliczyć $f^{(2025)}(-2)$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję f na sumę ułamków prostych:
$$\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}+\frac{D}{x+4}$$
$$1=A\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)+B\cdot x\cdot(x+3)\cdot(x+4)+Cx\cdot(x+1)\cdot(x+4)+Dx\cdot(x+1)\cdot(x+3)$$
Podstawiając w powyższej równości kolejno $x=0$, $x=-1$, $x-3$ i $x=-4$ otrzymujemy odpowiednio $A=1/12$, $B=-1/6$, $C=1/6$, $D=-1/12$. Wobec tego
$$f(x)=\frac{1/12}{x}-\frac{1/6}{x+1}+\frac{1/6}{x+3}-\frac{1/12}{x+4}\,.$$
Po 2025-krotnym zróżniczkowaniu otrzymujemy
$$f^{(2025)}(x)=2025!\cdot\left(-\frac{1/12}{x^{2026}}+\frac{1/6}{(x+1)^{2026}}-\frac{1/6}{(x+3)^{2026}}+\frac{1/12}{(x+4)^{2026}}\right),$$
skąd
$$f^{(2025)}(-2)=2025!\cdot\left(-\frac{1/12}{(-2)^{2026}}+\frac{1/6}{(-1)^{2026}}-\frac{1/6}{1^{2026}}+\frac{1/12}{2^{2026}}\right)=0\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f^{(2025)}(-2)$ jest równa 0.

Zadanie **22.** **(10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}\,.$$

Rozwiązanie:
Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)} = \frac{A}{5n-2} + \frac{B}{5n+3}\,.$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(5n-2)\cdot(5n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A(5n+3) + B(5n-2)\,. \qquad (*)$$

Dla $n=2/5$ otrzymujemy $A=1/5$, natomiast przyjęcie $n=-3/5$ daje $B=-1/5$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{23}\right)+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{28}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{5N-12}-\frac{1}{5N-7}\right)+\left(\frac{1}{5N-7}-\frac{1}{5N-2}\right)+\left(\frac{1}{5N-2}-\frac{1}{5N+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/15$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/15$.

Uwaga: Wydawać by się mogło, że w mianowniku wyrażenia definiującego wyraz ogólny szeregu mogą być niemal dowolne dwa czynniki liniowe i zadanie będzie się rozwiązywało podobnie. Nic bardziej mylnego. W zadaniu kluczowe jest to, że ułamki o mianownikach postaci $5n-2$ upraszczają się z ułamkami o mianownikach postaci $5n+3$.

Zadanie **23.** **(10 punktów)**

Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^{1,001}.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste $x<y$. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0=x,\quad t_1=x+\frac{y-x}{n},\quad t_2=x+2\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_3=x+3\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_4=x+4\cdot\frac{y-x}{n},\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad t_{n-2}=x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_{n-1}=x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_n=x+n\cdot\frac{y-x}{n}=y.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności

$$|f(t_0)-f(t_1)|\leqslant(t_0-t_1)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}},$$

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant(t_1-t_2)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}},$$

$$|f(t_2)-f(t_3)|\leqslant(t_2-t_3)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})|\leqslant(t_{n-2}-t_{n-1})^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}},$$

$$|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant(t_{n-1}-t_n)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=$$

$$=|(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))|\leqslant$$

$$\leqslant|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}+\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}+\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}+\ldots+\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1/1000}}.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1/1000}}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

Zadanie **24. (10 punktów)**

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\left(1-x^2\right)^{2025}\cdot(x+1)^2>1\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\left(1-x^2\right)^{2025}\cdot(x+1)^2\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2025\cdot\left(1-x^2\right)^{2024}\cdot(-2x)\cdot(x+1)^2+\left(1-x^2\right)^{2025}\cdot 2\cdot(x+1)\,.$$

Ponieważ

$$f(0)=1 \qquad \text{oraz} \qquad f'(0)=2\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie 0 wartość 1, która nie jest ekstremum lokalnym (bo $f'(0)\neq 0$). W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu zera także wartość większą od 1.

Zadanie **25. (10 punktów)**

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $(n,\,k)$, gdzie $2k<n$, spełniających równanie

$$\binom{n}{k}=2\cdot\binom{n}{2k}\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $n=3k-1$ otrzymujemy

$$\binom{n}{k}=\binom{3k-1}{k}=\frac{(3k-1)!}{k!\cdot(2k-1)!}=2\cdot\frac{(3k-1)!}{2\cdot k!\cdot(2k-1)!}=2\cdot\frac{(3k-1)!}{2\cdot k\cdot(k-1)!\cdot(2k-1)!}=$$

$$=2\cdot\frac{(3k-1)!}{(k-1)!\cdot 2k\cdot(2k-1)!}=2\cdot\frac{(3k-1)!}{(k-1)!\cdot(2k)!}=2\cdot\binom{3k-1}{2k}=2\cdot\binom{n}{2k}\,.$$

Odpowiedź

Dane równanie jest spełnione przez pary liczb $(n,\,k)$, gdzie $k>1$ jest dowolną liczbą naturalną, a $n=3k-1$.

Uwaga

Bardzo trudno jest kontrolować iloraz współczynników dwumianowych leżących daleko od siebie w przypadkowych miejscach – najlepiej, gdy są to współczynniki stojące obok siebie w jednym wierszu trójkąta Pascala lub położone symetrycznie. Dlatego rozwiązujemy uklad równań

$$\binom{n}{k}=2\cdot\binom{n}{k-1}=2\cdot\binom{n}{2k}\,.$$

Tak się szczęśliwie składa, że lewe i prawe równanie prowadzą do tej samej zależności $n=3k-1$.

Zadanie **26. (10 punktów)**

Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$32^n < n^{2^{2023}} < 64^n\,.$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy[1] $n = k\cdot 2^{2023}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$32^{k\cdot 2^{2023}} < \left(k\cdot 2^{2023}\right)^{2^{2023}} < 64^{k\cdot 2^{2023}}\,,$$

czyli

$$\left(32^k\right)^{2^{2023}} < \left(k\cdot 2^{2023}\right)^{2^{2023}} < \left(64^k\right)^{2^{2023}}\,,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$32^k < k\cdot 2^{2023} < 64^k\,,$$

$$2^{5k} < k\cdot 2^{2023} < 2^{6k}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że nierówności ($\clubsuit$) są prawdziwe dla $k = 400$, gdyż wówczas

$$\mathbf{2^{5k}} = 2^{2000} < 400\cdot 2^{2023} = \mathbf{k\cdot 2^{2023}} < 2^9\cdot 2^{2023} = 2^{2032} < 2^{2400} = \mathbf{2^{6k}}\,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 400\cdot 2^{2023}$.

Uwaga

Liczbę wymaganą w zadaniu otrzymamy także dla k spełniających nierówności

$$339 \leqslant k \leqslant 406\,.$$

Zauważ, że wśród tych liczb nie ma potęgi dwójki!!!

[1] Rozwiązanie poprzez przedstawienie stron nierówności w postaci potęg dwójki się nie udaje, wobec czego próbujemy porównywać potęgi o tym samym wykładniku, a mianowicie wykładniku 2^{2023}.