KOLOKWIUM nr 7, 26.01.2024, godz. 10:30–11:30

Zadanie **18. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba

$$\log_{(2/3)}\left(\frac{9}{8}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(2/3)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(2/3)}\left(\frac{9}{8}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-m/n}=\frac{9}{8}\,,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-m}=\left(\frac{9}{8}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m}=\left(\frac{9}{8}\right)^{n}\,,$$

$$3^m\cdot 8^n=9^n\cdot 2^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n}\cdot 3^m=2^m\cdot 3^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n = m \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$3n=m=2n\,,$$

co jednak prowadzi do $n=0$, a to nie jest liczba dodatnia.

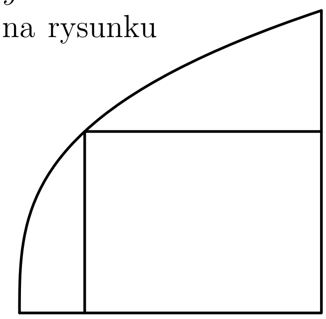
Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(2/3)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(2/3)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są całkowite nieujemne.

Zadanie **19. (10 punktów)**

W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=\sqrt[3]{x}$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

Niech $(a,\ \sqrt[3]{a})$, gdzie $a\in(0,1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot\sqrt[3]{a}=a^{1/3}-a^{4/3}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to 1^-}P(a)=0\,,$$

a ponadto

$$P'(a)=\frac{1}{3\cdot a^{2/3}}-\frac{4\cdot\sqrt[3]{a}}{3}=\frac{1-4a}{3\cdot a^{2/3}}\,.$$

Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=1/4$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3}{4\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{8}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $\frac{3}{4\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{8}$.

Zadanie **20. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+14n+50}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:
Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+14n+50}-n=\sqrt{n^2+14n+50}-(n+7)+7=\frac{n^2+14n+50-(n+7)^2}{\sqrt{n^2+14n+50}+(n+7)}+7=$$

$$=\frac{n^2+14n+50-n^2-14n-49}{\sqrt{n^2+14n+50}+(n+7)}+7=\frac{1}{\sqrt{n^2+14n+50}+(n+7)}+7\,.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do 7.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{65}-1$) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres górny danego zbioru jest równy $\sqrt{65}-1$, a kres dolny 7.