KOLOKWIUM nr 5, 3.01.2024, godz. 8:15–9:45

Zadanie **13.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2+2x-4\cdot|x+1|$$

na przedziale $[-5,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1,+\infty) \\ -x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-4 & \text{dla} \quad x\in[-1,3] \\ x^2+6x+4 & \text{dla} \quad x\in[-5,-1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5,3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{dla} \quad x\in(-1,3) \\ 2x+6 & \text{dla} \quad x\in(-5,-1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-1,5)$.

2° W przypadku $x\in(-5,-1)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+6=0$, co ma rozwiązanie $x=-3$, które należy do rozważanego przedziału $(-5,-1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: -3 i 1,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1.

$$f(-5)=-1\,,$$
$$f(-3)=-5\,,$$
$$f(-1)=-1\,,$$
$$f(1)=-5\,,$$
$$f(3)=-1\,.$$

Odpowiedź:

Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -5 w punktach -3 i 1, a wartość największą równą -1 w punktach -5, -1 oraz 3.

Zadanie **14. (10 punktów)**
Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.
Rozwiązanie:
Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{3h}-1}{\ln(1+2h)}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1-A\cdot\ln(1+2h)}{h\cdot\ln(1+2h)}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{3e^{3h}-\frac{2A}{1+2h}}{\ln(1+2h)+\frac{2h}{1+2h}}\,.$$

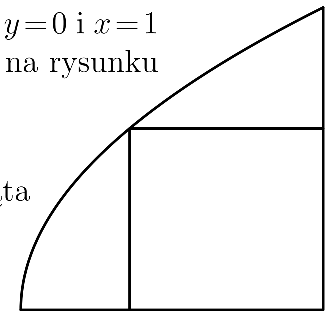
Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{3-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=3/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{9e^{3h}+\frac{6}{(1+2h)^2}}{\frac{2}{1+2h}+\frac{2\cdot(1+2h)-2h\cdot 2}{(1+2h)^2}}=\frac{15}{4}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=3/2$ i wówczas $f'(0)=15/4$.

Zadanie **15. (10 punktów)**

W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=\sqrt{x}$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

Niech $(a, \sqrt{a})$, gdzie $a\in(0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot\sqrt{a}=a^{1/2}-a^{3/2}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to 1^-}P(a)=0\,,$$

a ponadto

$$P'(a)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}-\frac{3\cdot\sqrt{a}}{2}\,.$$

Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=1/3$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Zadanie **16. (10 punktów)**

Funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f określonej na przedziale $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$ wzorem

$$f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^7+x+1}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy pochodne $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ oraz $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ są liczbami wymiernymi czy niewymiernymi.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^7+x+1}\right)^2+1}\cdot\frac{7x^6+1}{2\cdot\sqrt{x^7+x+1}}=\frac{7x^6+1}{(x^7+x+2)\cdot 2\cdot\sqrt{x^7+x+1}}\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy:

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\,,$$

czyli

$$g'\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^7+x+1}\right)=\frac{2\cdot(x^7+x+2)\cdot\sqrt{x^7+x+1}}{7x^6+1}\,.$$

Przyjmując w powyższym wzorze $x=0$ dostajemy

$$g'(\operatorname{arctg}1)=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{1}}{1}=4\,.$$

Z kolei przyjęcie $x=1$ prowadzi do

$$g'\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)=g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\cdot 4\cdot\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}\,.$$

Odpowiedź: Liczba $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$ jest wymierna, a liczba $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ jest niewymierna.

Zadanie **17. (dodatkowe za 13 punktów)**

Dana jest funkcja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^5+8\right) .$$

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2\cdot|x-y| .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y| ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla każdej liczby rzeczywistej $x>0$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 2 ,$$

czyli

$$\frac{5x^4}{x^5+8}\leqslant 2 . \qquad (\spadesuit)$$

Możesz otrzymać 3 punkty za dojście do tego miejsca.

Nierówność ($\spadesuit$) można udowodnić różnymi sposobami.

Sposób I (dla koneserów nierówności między średnimi):

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną zastosowanej[1] do czterech liczb x^5 i jednej liczby 32 otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[5]{x^{20}\cdot 32}\leqslant\frac{4x^5+32}{5} ,$$

$$2x^4\leqslant\frac{4x^5+32}{5} ,$$

$$5x^4\leqslant 2\cdot\left(x^5+8\right) ,$$

co stanowi nierówność ($\spadesuit$). To kończy rozwiązanie zadania.

---

[1]Liczby, do których stosujemy nierówność między średnimi, mogą wyglądać na wyciągnięte z kapelusza. Podczas prezentacji rozwiązania nie ma potrzeby się tłumaczyć z tego, dlaczego akurat takie liczby bierzemy. Poniżej stosowne wyjaśnienie.

Ponieważ naszym celem jest nierówność postaci

$$???\,x^4\leqslant x^5+8 ,$$

w nierówności między średnimi trzeba wziąć liczby x^5 i 8, bo takie składniki występują po prawej (większej) stronie dowodzonej nierówności, gdzie oczekujemy jakiejś średniej arytmetycznej. Aby średnia geometryczna (lewa strona, mniejsza) dała x^4 (ewentualnie z jakimś współczynnikiem), liczbę x^5 trzeba wziąć czterokrotnie. Aby jednak po prawej stronie wyszła dokładnie taka suma, jaką mamy w dowodzonej nierowności, każde z czterech wystąpień x^5 trzeba wziąć ze współczynnikiem $1/4$. To prowadzi do piątki liczb: cztery liczby $x^5/4$ i jedna liczba 8.

Jednak nierówność między średnimi praktycznie się nie zmienia przy przeskalowaniu liczb (czyli przemnożeniu przez tę samą stałą), do których ją stosujemy. Wobec tego dla elegancji przemnażamy piątkę liczb przez 4 otrzymując cztery liczby x^5 i jedną liczbę 32.

Sposób II (standardowy):
Oznaczając

$$g(x)=\frac{5x^4}{x^5+8}$$

stwierdzamy, że

$$g'(x)=\frac{20x^3\cdot(x^5+8)-25x^8}{(x^5+8)^2}=\frac{-5x^8+160x^3}{(x^5+8)^2}=\frac{5x^3\cdot(32-x^5)}{(x^5+8)^2}\,.$$

Stąd wynika, że $g'(2)=0$, a ponadto $g'(x)>0$, gdy $x\in(0,\,2)$ oraz $g'(x)<0$, gdy $x>2$.

Wobec tego funkcja g jest dodatnia i rosnąca na przedziale $(0,2]$ oraz dodatnia i malejąca na przedziale $[2,\infty)$. W konsekwencji przyjmuje ona w punkcie 2 wartość największą. Ponieważ $g(2)=2$, nierówność (♠) jest udowodniona.

Sposób III (brutalny, dla miłośników uciążliwych rachunków):
Dowodzoną nierówność (♠) możemy przepisać w postaci

$$2x^5-5x^4+16\geqslant 0\,,$$

co po rozłożeniu na czynniki[2] lewej strony daje równoważną nierówność

$$(x-2)^2\cdot\left(2x^3+3x^2+4x+4\right)\geqslant 0\,.$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa, gdyż obydwa czynniki po lewej stronie są nieujemne dla dodatnich x.

[2]Trzeba zauważyć, że dla $x=2$ zachodzi równość, co pozwala wykryć czynnik $x-2$.