ANALIZA 1, KOLOKWIUM nr 3, 29.11.2023, godz. 8:15–9:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **9.** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-12}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+B)^2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2+2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2+4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2+6}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

Zadanie **10.** **(10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{200}\,.$$

Zadanie **11.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+9n+20}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Zadanie **12.** **(10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranej wartości rzeczywistej parametru a udowodnić, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{3x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.