KOLOKWIUM nr 3, 29.11.2023, godz. 8:15–9:45

Zadanie **9. (10 punktów)**

Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-12}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+B)^2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2+2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2+4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2+6}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2+6}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2+6}=\frac{\sqrt{n^2+3\cdot\frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2n+1+2\cdot\frac{2(B-1)n+B^2+5}{2}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}\,, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{3}=\frac{2(B-1)n+B^2+5}{2}\,, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2\cdot\left(2An+A^2\right)=3\cdot\left(2(B-1)n+B^2+5\right)\,,$$

$$4An+2A^2=6(B-1)n+3\left(B^2+5\right)\,. \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases}4A &= 6(B-1)\\ 2A^2 &= 3\left(B^2+5\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2A &= 3(B-1)\\ 2A^2 &= 3B^2+15\end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $A=\frac{3(B-1)}{2}$, co po podstawieniu do równania drugiego daje kolejno

$$\frac{9(B-1)^2}{2}=3B^2+15\,,$$

$$9B^2-18B+9=6B^2+30\,,$$

$$3B^2-18B-21=0\,,$$

$$B^2-6B-7=0\,,$$

skąd[1] $B=7$ i $A=9$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=6n+27\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $6n+28$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2+6} \leqslant \sum_{k=0}^{6n+27}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} \leqslant (6n+28)\cdot\frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+1)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2+6}=\frac{(6n+28)\cdot n}{(n+7)^2+6}=\frac{6+\frac{28}{n}}{\left(1+\frac{7}{n}\right)^2+\frac{6}{n^2}}\to 6$$

oraz

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+1)^2}=\frac{(6n+28)\cdot(n+9)}{(n+1)^2}=\frac{\left(6+\frac{28}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\to 6\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=9$, $B=7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 6.

[1] Rozwiązanie $B=-1$ odrzucamy ze względu na nierówność $B>1$.

Zadanie **10. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{200}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+10^8}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+10^8}-\sqrt[4]{y^2+10^8}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^2+10^8)-(y^2+10^8)}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}<1\,.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+10^8}+\sqrt[4]{0+10^8}}=\frac{1}{100+100}=\frac{1}{200}\,.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{200}\cdot 1=\frac{|x-y|}{200}\,.$$

Zadanie **11. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+9n+20}-n:\,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:
Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+9n+20}-n=\sqrt{n^2+9n+20}-\left(n+\frac{9}{2}\right)+\frac{9}{2}=\frac{n^2+9n+20-\left(n+\frac{9}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+9n+20}+\left(n+\frac{9}{2}\right)}+\frac{9}{2}=$$

$$=\frac{n^2+9n+20-n^2-9n-\frac{81}{4}}{\sqrt{n^2+9n+20}+\left(n+\frac{9}{2}\right)}+\frac{9}{2}=-\frac{1/4}{\sqrt{n^2+9n+20}+\left(n+\frac{9}{2}\right)}+\frac{9}{2}\,.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $9/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{30}-1$) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $\sqrt{30}-1$, a kres górny $9/2$.

Zadanie **12. (10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranej wartości rzeczywistej parametru a udowodnić, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{3x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f(0)=1$ oraz $f(1)=a+2$, funkcja f ma szansę być odwrotną do samej siebie tylko wtedy, gdy

$$0=f(f(0))=a+2\,,$$

czyli tylko dla $a=-2$.

Wykażemy, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=-2x+\sqrt{3x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Wykres funkcji f jest krzywą[2] o równaniu

$$y=-2x+\sqrt{3x^2+1}\,,$$

czyli

$$y+2x=\sqrt{3x^2+1}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Z powyższego równania wynika

$$y+x=\sqrt{3x^2+1}-x\geqslant\sqrt{3x^2+1}-|x|>\sqrt{x^2}-|x|=$$
$$=|x|-|x|=0\,,$$

natomiast z podobnego równania

$$y+2x=-\sqrt{3x^2+1} \qquad (\diamondsuit)$$

dochodzimy do

$$y+x=-\sqrt{3x^2+1}-x\leqslant-\sqrt{3x^2+1}+|x|<-\sqrt{x^2}+|x|=$$
$$=-|x|+|x|=0\,.$$

Podsumujmy:

$$y+2x=\sqrt{3x^2+1} \quad\Rightarrow\quad x+y>0$$

oraz

$$y+2x=-\sqrt{3x^2+1} \quad\Rightarrow\quad x+y<0\,,$$

a więc w równaniu

$$y+2x=\pm\sqrt{3x^2+1}$$

znak "$\pm$" jest taki sam jak znak liczby $x+y$.

Idea powyższych oszacowań jest następująca: W wyrażeniu

$$\pm\sqrt{3x^2+1}-x\,,$$

[2] Z uzyskanej w dalszej części rozwiązania postaci równania tej krzywej można stwierdzić, że krzywa ta jest hiperbolą. A dokładniej jest jedną gałęzią hiperboli, podczas gdy druga gałąź jest opisywana przez równanie ($\diamondsuit$).

które jest równe sumie $x+y$, pierwszy składnik ma większą wartość bezwzględną niż drugi, a więc znak całego wyrażenia (czyli znak $x+y$) będzie taki sam jak znak pierwszego składnika, czyli jak znak "$\pm$".

Zatem równanie ($\heartsuit$) wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$, gdyż nierówność ta wymusza, aby pierwiastek był ze znakiem plus, a nie minus.

Otrzymujemy kolejno

$$y^2+4xy+4x^2=3x^2+1, \qquad x+y>0$$
$$y^2+4xy+x^2=1, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

Odpowiedź: Jedyną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-2$.